



ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ
МЕГАПОЛИС

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ



ИТ-класс

В МОСКОВСКОЙ ШКОЛЕ

**НАПРАВЛЕНИЯ
РОБОТОТЕХНИКА, СОЗДАНИЕ
ЦИФРОВЫХ ДВОЙНИКОВ,
ИНФОРМАЦИОННАЯ
БЕЗОПАСНОСТЬ И ТЕХНОЛОГИИ
СВЯЗИ, БОЛЬШИЕ ДАННЫЕ И
ТЕХНОЛОГИИ ИСКУССТВЕННОГО
ИНТЕЛЛЕКТА**

ТЕОРЕТИЧЕСКИЙ ЭТАП

**МОСКВА
2025**



ИНТЕЛЛЕКТУАЛЬНЫЙ
МЕГАПОЛИС

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ РАЗРАБОТАНЫ:



Вестфальский Алексей Евгеньевич, кандидат физико-математических наук,
доцент кафедры Математического и компьютерного моделирования

Провоторова Любовь Владимировна, ассистент
кафедры Математического и компьютерного моделирования

Варшавский Павел Романович, кандидат технических наук,
заведующий кафедрой Прикладной математики и искусственного интеллекта

Голубева Ирина Валерьевна, старший преподаватель
кафедры Прикладной математики и искусственного интеллекта

Лапицкий Константин Михайлович, кандидат технических наук,
доцент кафедры Физики им. В.А. Фабриканта

Сапронов Максим Васильевич, кандидат технических наук,
доцент кафедры Физики им. В.А. Фабриканта

МОСКВА
2025

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ
по решению заданий №№ 7 и 8 по предмету «Физика»
в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных
навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»,
номинация «ИТ-класс»,
направления «Создание цифровых двойников»,
«Большие данные и технологии искусственного интеллекта»,
«Робототехника», «Информационная безопасность и технологии связи»

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «ИТ-класс» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационных вариантов по предмету «Физика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Теоретический этап Конкурса проводится в форме компьютерного тестирования. Во время выполнения работы разрешается использовать непрограммируемый встроенный калькулятор, текстовый и графический редакторы, среды программирования. В контрольно-измерительных материалах используются задания базового уровня сложности с выбором варианта ответа. Уровень сложности заданий требует от исполнителя следующих привитых умений:

- анализировать и выдвигать предположения;
- составлять уравнения по текстовым формулировкам;
- характеризовать физические явления и процессы, используя физические законы;
- выявлять недостающие или избыточные данные в условии задач, обосновывать выбор метода решения задачи, необходимых законов и формул;

- решать расчётные задачи, выбирая адекватную физическую модель с использованием законов и формул, связывающих физические величины;
- решать алгебраические уравнения и системы;
- последовательно выполнять этапы решения задачи;
- определять размерность физической величины, полученной при решении задачи;
- анализировать полученный результат.

Рекомендуется организовать решение задач по физике следующим способом:

1. Чтение условия не менее двух раз. Первое – ознакомительное, второе и последующие (при необходимости) – для выяснения конкретных деталей описанного события, составления или изучения рисунка (графика, схемы) и краткой записи условия с переводом значений всех величин в систему СИ (при необходимости).

2. Проникновение в суть рассматриваемого в условии физического явления: выяснение физической теории, описывающей явление, конкретных законов и принципов, основных формул, охватывающих известные и неизвестные величины, приведённые в условии, и физические константы.

3. Установление физической связи между величинами, приведёнными в условии, и неизвестными величинами посредством системы уравнений, учитывая общее требование: количество уравнений в системе должно быть не меньше общего числа неизвестных физических величин в ней.

4. Решение системы уравнений и получение конечной формулы, выражающей искомую неизвестную величину через величины, указанные в условии, и известные константы.

5. Выполнение численных расчётов, приведение полученного результата к требуемому по условию задачи формату (с применением стандартных множителей и приставок) и проверка полученного значения.

При краткой записи условия задания необходимо сразу же выяснить размерность физических величин, перевести их в систему СИ. Иногда при

решении задания не требуется краткой записи условия задачи, но это создаст трудности в построении математической модели физической ситуации задачи. Поэтому рекомендуется записывать «Дано» подробно и проводить анализ текста задания, корректный перевод текстовой формы условия физической задачи в математическую форму, правильное указание размерностей физических величин. Если задание решается в общем виде, то последний пункт рекомендаций по записи «Дано» допускается пропустить.

Далее идёт самый сложный этап – построение физической модели ситуации задачи. В физической модели отражается основная идея задания. В большинстве задач из разных разделов физики допускается возможность схематического или графического изображения физической ситуации, описанной в задаче. Даже если в условии этого не требуется, рисунок часто оказывается полезным. В предлагаемых задачах эта модель имеет вид чертежа или схемы, иллюстрирующей механическое движение или равновесие тела или системы тел. Если рисунок прилагается к задаче в готовом виде, то все усилия должны быть направлены на его анализ и внесение необходимых обозначений физических величин (сил, ускорений и т. п.) с целью построения математической модели движения тел, записи необходимых уравнений и их преобразования к виду, оптимальному для решения.

В результате анализа физической модели необходимо записать базовые формулы физических понятий и законы, которые планируется использовать. Нужно описать каждую вновь вводимую переменную (известную или неизвестную) и указать, какой буквой она обозначается. Должен быть понятен смысл всех физических величин. Особенно это касается величин, которые обозначаются одинаковыми греческими или латинскими буквами (время и температура, электрический заряд и количество теплоты и т. п.). Необходимо их чёткое разграничение для верного подсчёта известных и неизвестных физических величин в задаче.

При описании решения учащиеся должны указать названия всех законов и границы, в которых они применяются. Важно правильно указать связи

между законами, проиллюстрировать каждую связь математическими уравнениями. После построения системы алгебраических уравнений в явном или неявном виде (знак системы уравнений учащиеся могут не ставить), математическая модель решения задачи считается построенной. Нужно чёткое осознание учащимися, что число уравнений, должно быть равно числу неизвестных физических величин.

В дальнейшем решение задачи предполагает работу с алгебраическими уравнениями. На первое место в этом случае ставится знание математических формул, умения их преобразовывать, т.е. собственно математические умения.

Важно уметь объяснять каждую математическую выкладку и логический переход, так, чтобы была понятна логика решения: из какой формулы выражается конкретная физическая величина, куда она подставляется, какие происходят сокращения и преобразования формулы.

На следующем этапе решения задачи получают численное значение физических величин. Нужно проследить, чтобы вновь вводимые при построении модели постоянные были выражены в системе СИ и после проведения расчётов учащиеся получили результат в стандартном виде.

После получения численного результата его значение проверяется на соответствие физической реальности – результат должен быть разумным, согласовываться с условием задачи, искомая формула иметь соответствующую размерность и находиться в объективных границах этой величины, заданной физической реальностью. Необходимо сделать проверку разными способами: по размерности искомой физической величины, по решению задачи другим способом (если таковое возможно) и т. п.

Если задача предполагает несколько вариантов решения, то наиболее ценным будет тот, который предполагает самое рациональное решение – наиболее короткое, с одной стороны, и наиболее обоснованное – с другой. Только после этого учащийся переходит к записи ответа и завершению задачи.

Ученик может улучшить эффективность решения, если будет примерно представлять, насколько разные способы решения задач отличаются по

трудоемкости и по времени. Поэтому желательно в процессе подготовки рассмотреть с учениками все возможные варианты.

Проведём анализ решения заданий демонстрационных вариантов.

Задание №7.

Вариант 1. Шар массой $m_1 = 1$ кг падает с нулевой начальной скоростью с высоты $H = 3$ м. В момент времени, когда его потенциальная энергия уменьшилась в 3 раза, он испытал абсолютно неупругое соударение с шаром массой $m_2 = 2$ кг, летящим горизонтально со скоростью $v_2 = 1$ м/с. Определите величину скорости и совместного движения шаров и тангенс угла α , под которым она направлена к горизонту, непосредственно после соударения. Принять ускорение свободного падения равным $g = 9,8$ м/с², сопротивлением воздуха пренебречь, нулевой уровень потенциальной энергии выбрать на поверхности Земли. Ответ выразите в единицах СИ и округлите до десятых.

Выберите один верный вариант ответа:

А) $u = 2,2$ м/с; $\operatorname{tg} \alpha = 3,1$;

Б) $u = 3,2$ м/с; $\operatorname{tg} \alpha = 2,1$;

В) $u = 4,2$ м/с; $\operatorname{tg} \alpha = 3,1$;

Г) $u = 2,2$ м/с; $\operatorname{tg} \alpha = 1,1$.

Вариант 2. Пуля массой $m_1 = 20$ г, летящая со скоростью $v = 500$ м/с вниз под углом $\alpha = 30^\circ$ к горизонту, сталкивается с покоящимся шаром массой $m_2 = 2$ кг, подвешенным на невесомой нерастяжимой нити длиной $l = 1$ м, и застревает в нём. Определите косинус угла β , на который отклонится нить с шаром и пулей от вертикали. Принять ускорение свободного падения равным $g = 9,8$ м/с², сопротивлением воздуха пренебречь. Ответ округлите до сотых.

Выберите один верный вариант ответа:

А) $\cos \beta = 0,06$;

Б) $\cos\beta = 0,04$;

В) $\cos\beta = 0,08$;

Г) $\cos\beta = 0,15$.

Вариант 3. Брусок массой $m_1 = 5$ кг соскальзывает по совершенно гладкой наклонной плоскости с высоты $h = 2$ м и попадает в тележку с песком массой $m_2 = 25$ кг, стоящую у подножья плоскости на горизонтальной поверхности. Угол наклона плоскости к горизонту $\alpha = 60^\circ$. Определите скорость и совместного движения тележки и бруска непосредственно после соударения. Принять ускорение свободного падения равным $g = 9,8$ м/с². Ответ выразите в СИ и округлите до сотых.

Выберите один верный вариант ответа:

А) $u = 0,52$ м/с;

Б) $u = 0,64$ м/с;

В) $u = 0,35$ м/с;

Г) $u = 0,25$ м/с.

Законы сохранения в механике

Основные законы, которые используются при решении всех трёх вариантов задачи – это закон сохранения импульса системы материальных точек и закон сохранения механической энергии.

Закон сохранения импульса заключается в том, что импульс системы материальных точек, на которую не действуют внешние силы (такую систему называют замкнутой), сохраняется с течением времени. Закон сохранения импульса выражается формулой (1)

$$\vec{P}_{\text{сист.нач}} = \vec{P}_{\text{сист.кон}}, \quad (1)$$

где $\vec{P}_{\text{сист.нач}}$ – начальный импульс системы, $\vec{P}_{\text{сист.кон}}$ – конечный импульс системы.

Необходимо отметить, что в практических задачах строго замкнутые системы не встречаются, поэтому при решении задач закон сохранения импульса применяют приближенно в следующих трёх случаях.

1. Если векторная сумма внешних сил, действующих на систему материальных точек, равна нулю, то импульс системы сохраняется с течением времени.

2. Если проекция векторной суммы внешних сил, действующих на систему материальных точек, на какое-либо направление равна нулю, то проекция импульса системы на это направление сохраняется с течением времени.

3. Если время взаимодействия материальных точек мало, и при этом возникающие внутренние силы во много раз больше внешних сил, то приближенно можно считать, что импульс системы материальных точек не изменяется за время взаимодействия. К этому случаю относятся удары, взрывы и т.п.

Иногда для обоснования применимости закона сохранения импульса при решении задачи необходимо воспользоваться несколькими рассмотренными случаями.

Механическая энергия системы $W_{\text{мех}}$ определяется суммой потенциальной $W_{\text{пот}}$ и кинетической $W_{\text{кин}}$ энергий

$$W_{\text{мех}} = W_{\text{кин}} + W_{\text{пот}}. \quad (2)$$

Кинетическая энергия материальной точки массой m , движущейся со скоростью \vec{v} , определяется по формуле (3)

$$W_{\text{кин}} = \frac{mv^2}{2}. \quad (3)$$

Потенциальная энергия материальной точки массой m в однородном гравитационном поле определяется выражением (4)

$$W_{\text{пот}} = mgh, \quad (4)$$

где g – ускорение свободного падения материальной точки в рассматриваемом поле, h – высота, на которой находится материальная точка над нулевым уровнем потенциальной энергии.

Закон сохранения механической энергии заключается в том, что если внешние и внутренние непотенциальные силы не совершают работу, то полная механическая энергия системы сохраняется с течением времени. Закон сохранения механической энергии выражается формулой (5)

$$W_{\text{мех.нач}} = W_{\text{мех.кон}}, \quad (5)$$

где $W_{\text{мех.нач}}$ – начальная механическая энергия системы, $W_{\text{мех.кон}}$ – конечная механическая энергия системы.

Решение варианта 1.

Решение задачи следует начать с записи «Дано», указав заданные в условии значения физических величин и искомую физическую величину. Все заданные значения следует перевести в СИ.

Дано:

$$m_1 = 1 \text{ кг}$$

$$H = 3 \text{ м}$$

$$W_{\text{пот.нач}} / W_{\text{пот.кон}} = 3$$

$$m_2 = 2 \text{ кг}$$

$$v_2 = 1 \text{ м/с}$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$u - ?$

$\operatorname{tg} \alpha - ?$

Следующим и очень важным этапом решения задачи на законы сохранения в механике является изображение поясняющего рисунка (рис. 1). На рис. 1 слева представлен шар массой m_1 , падающий с высоты H . По условию задачи сказано, что соударение шаров m_1 и m_2 происходит в момент времени, когда потенциальная энергия шара m_1 уменьшилась в 3 раза, в соответствии с формулой (4) это означает, что соударение происходит на высоте $h = H / 3$. Непосредственно перед соударением шар массой m_1 имеет скорость v_1 , направленную вертикально вниз, а шар m_2 – скорость v_2 , направленную горизонтально вправо. Для определённости на рисунке также введены координатные оси x и y , потенциальная энергия отсчитывается от поверхности Земли.

По условию задачи сказано, что шары соударяются абсолютно неупруго. Это означает, что после соударения они будут двигаться как единое целое тело массой $(m_1 + m_2)$. Совместное движение шаров со скоростью u непосредственно после соударения представлено на рис. 1 справа. Скорость u совместного движения направлена вниз под углом α к горизонту.

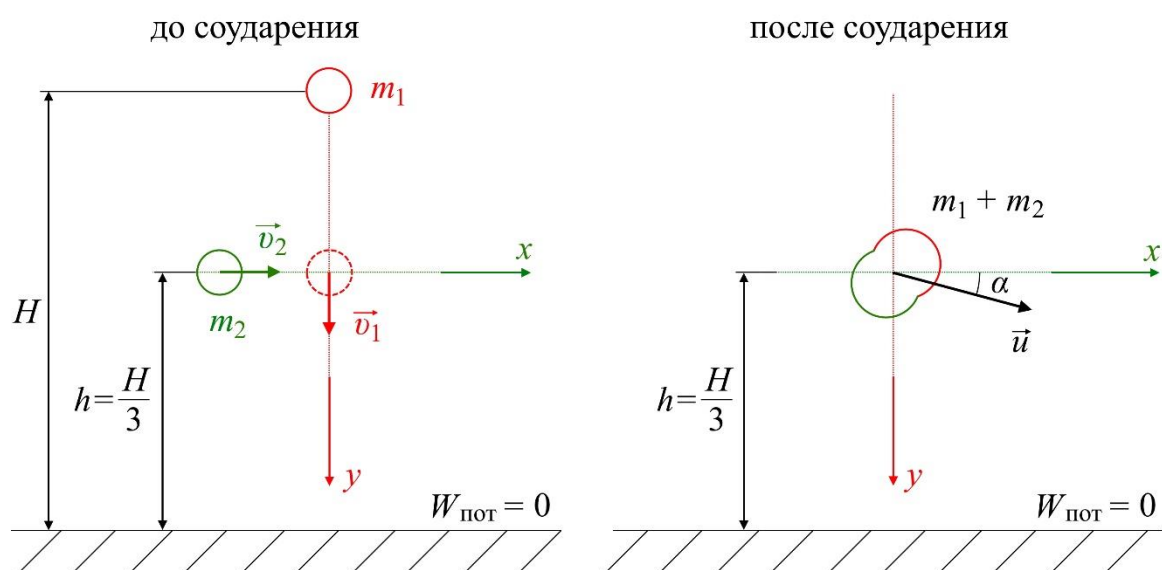


Рис. 1. Поясняющий рисунок

Движение тел в условиях данной задачи следует рассмотреть в два этапа: падение шара m_1 с высоты H до высоты h и абсолютно неупругое соударение шаров.

При падении шара m_1 его механическая энергия сохраняется, т.к. на него действует и совершает работу только потенциальная сила тяжести, а сопротивлением воздуха по условию задачи можно пренебречь. Закон сохранения механической энергии для момента начала падения шара m_1 и момента непосредственно перед соударением можно записать выражением (6)

$$m_1 g H = m_1 g \frac{H}{3} + \frac{m_1 v_1^2}{2}. \quad (6)$$

Пользуясь формулой (6), можно определить скорость v_1 первого шара непосредственно перед соударением

$$v_1 = \sqrt{\frac{4gH}{3}}. \quad (7)$$

На этапе абсолютно неупругого соударения шаров выполняется закон сохранения импульса, т.к. при ударе время взаимодействия мало, а возникающие внутренние силы много больше внешних. Закон сохранения импульса шаров в моменты времени непосредственно перед соударением и сразу же после соударения может записан следующим образом

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{u}. \quad (8)$$

Для определения скорости u и тангенса угла α следует записать векторное равенство (8) в проекциях на координатные оси x и y

$$m_1 v_1 = (m_1 + m_2) \cdot u \cdot \sin(\alpha), \quad (9)$$

$$m_2 v_2 = (m_1 + m_2) \cdot u \cdot \cos(\alpha). \quad (10)$$

Неизвестными в системе уравнений (8) и (9) являются искомые в задаче величины u и α (скорость v_1 определена в выражении (7)). Для определения скорости u возведём каждое из уравнений (9) и (10) в квадрат и сложим их

$$(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2 = (m_1 + m_2)^2 \cdot u^2 \cdot (\sin^2(\alpha) + \cos^2(\alpha)),$$

$$u = \frac{\sqrt{(m_1 v_1)^2 + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2}. \quad (11)$$

Для того, чтобы получить окончательное выражение для скорости u , подставим (7) в (11)

$$u = \frac{\sqrt{\frac{4m_1^2 g H}{3} + (m_2 v_2)^2}}{m_1 + m_2}. \quad (12)$$

Для поиска тангенса α разделим выражение (9) на выражение (10)

$$\frac{m_1 v_1}{m_2 v_2} = \frac{(m_1 + m_2) \cdot u \cdot \sin(\alpha)}{(m_1 + m_2) \cdot u \cdot \cos(\alpha)},$$

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{m_1 v_1}{m_2 v_2}. \quad (13)$$

Для того, чтобы получить окончательное выражение для тангенса угла α , поставим (7) в (13)

$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2m_1 \sqrt{gH}}{\sqrt{3} m_2 v_2}. \quad (14)$$

Проведём расчёт значений u и $\operatorname{tg}(\alpha)$ по формулам (12) и (14):

$$u = \frac{\sqrt{\frac{4 \cdot 1^2 \cdot 9,8 \cdot 3}{3} + (2 \cdot 1)^2}}{1 + 2} = 2,1909 \approx 2,2 \frac{\text{м}}{\text{с}},$$
$$\operatorname{tg}(\alpha) = \frac{2 \cdot 1 \cdot \sqrt{9,8 \cdot 3}}{\sqrt{3} \cdot 2 \cdot 1} = 3,1305 \approx 3,1.$$

Ответ: А) $u = 2,2 \text{ м/с}$; $\operatorname{tg}\alpha = 3,1$.

Решение варианта 2.

Запишем «Дано», указав заданные в условии значения физических величин и искомую физическую величину. Все заданные значения следует перевести в СИ.

Дано:

$$m_1 = 20 \text{ г} = 0,02 \text{ кг}$$

$$v = 500 \text{ м/с}$$

$$\alpha = 30^\circ$$

$$m_2 = 2 \text{ кг}$$

$$l = 1 \text{ м}$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

$$\cos\beta - ?$$

На рис. 2 слева представлены подвешенный на невесомой нерастяжимой нити длиной l неподвижный шар массой m_2 и пуля массой m_1 , летящая вниз под углом α к горизонту. Нулевой уровень потенциальной энергии соответствует положению центра шара в состоянии равновесия. Следует отметить, что в условиях данной задачи к пуле и шару применима модель материальной точки, т.е. их размерами в условии задачи можно пренебречь.

Ситуация на рис. 2 слева соответствует моменту непосредственно перед соударением.

Справа на рис. 2 представлена ситуация непосредственно после удара, когда пуля застряла в шаре, и система начала движение как единое целое тело со скоростью u , направленной горизонтально вправо. Пунктиром показано положение системы «пуля-шар» в момент наибольшего отклонения нити от вертикали, центр шара при этом поднялся на высоту h относительно нулевого уровня потенциальной энергии, а нить составила с вертикалью угол β , косинус которого и требуется найти по условию задачи.

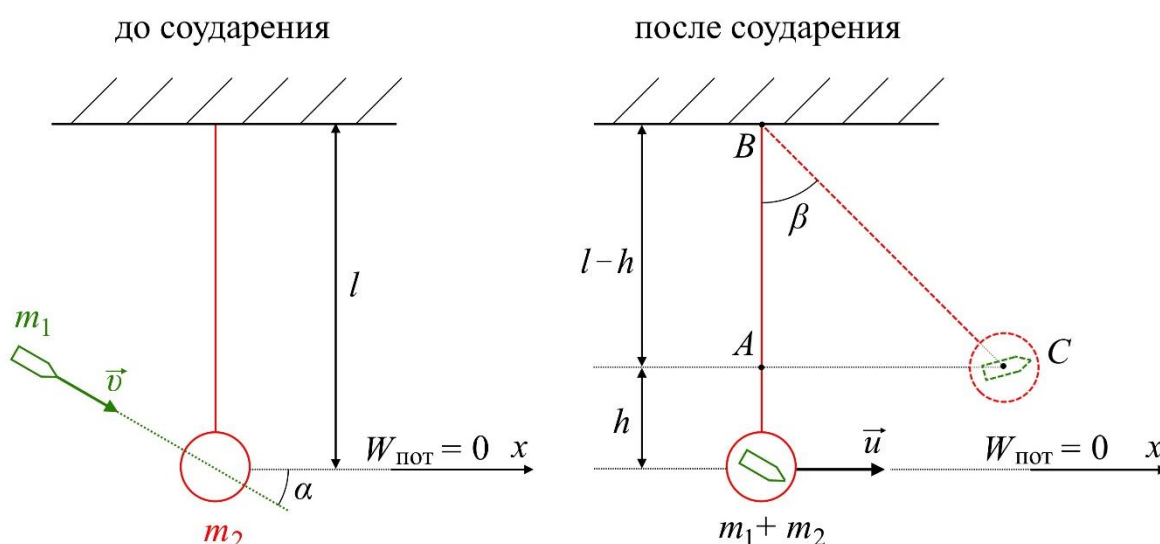


Рис. 2. Поясняющий рисунок

Движение тел в условии данной задачи следует рассмотреть в два этапа: абсолютно неупругое соударение пули и шара и подъём системы «пуля-шар» на высоту h .

На этапе абсолютно неупругого соударения пули и шара проекция векторной суммы внешних сил (сил тяжести и силы натяжения нити) на горизонтальную ось x равна нулю, поэтому можно считать, что проекция импульса системы «пуля-шар» на ось x не изменяется за время взаимодействия. Запишем закон сохранения проекции импульса системы на

ось x в момент непосредственно перед соударением и в момент сразу после соударения

$$m_1 v \cos(\alpha) = (m_1 + m_2)u. \quad (15)$$

Пользуясь формулой (15), определим скорость u системы сразу после удара

$$u = \frac{m_1 v \cos(\alpha)}{(m_1 + m_2)}. \quad (16)$$

На этапе совместного движения пули и шара выполняется закон сохранения механической энергии, т.к. работу совершает лишь сила тяжести, которая является потенциальной, а за время подъёма кинетическая энергия переходит в потенциальную энергию системы. Запишем закон сохранения механической энергии системы в момент непосредственно после удара и момент наибольшего отклонения нити от вертикали

$$\frac{(m_1 + m_2)u^2}{2} = (m_1 + m_2)gh. \quad (17)$$

Пользуясь формулой (17), определим высоту h , на которую поднимется система

$$h = \frac{u^2}{2g}, \quad (18)$$

подставляя (16) в (18) получим

$$h = \left(\frac{m_1 \cos(\alpha)}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{v^2}{2g}. \quad (19)$$

По условию задачи требуется найти косинус угла β . Из прямоугольного треугольника ABC видно, что

$$\cos(\beta) = \frac{AB}{BC} = \frac{l - h}{l} = 1 - \frac{h}{l}. \quad (20)$$

С учётом (19) получим

$$\cos(\beta) = 1 - \left(\frac{m_1 \cos(\alpha)}{m_1 + m_2} \right)^2 \frac{v^2}{2gl}. \quad (21)$$

Проведём расчёт значения $\cos(\beta)$ по формуле (21):

$$\cos(\beta) = 1 - \left(\frac{0,02 \cdot \cos(30^\circ)}{0,02 + 2} \right)^2 \frac{500^2}{2 \cdot 9,8 \cdot 1} = 0,06222 \approx 0,06.$$

Ответ: А) $\cos\beta = 0,06$.

Решение варианта 3.

Запишем «Дано», указав заданные в условии значения физических величин и искомую физическую величину. Все заданные значения следует перевести в СИ.

Дано:

$$m_1 = 5 \text{ кг}$$

$$h = 2 \text{ м}$$

$$m_2 = 25 \text{ кг}$$

$$\alpha = 60^\circ$$

$$g = 9,8 \text{ м/с}^2$$

На рис. 3 слева представлен брусок массой m_1 , изначально находящийся на гладкой наклонной плоскости на высоте h над нулевым уровнем потенциальной энергии. Угол наклона плоскости к горизонту α . Затем брусок соскальзывает по наклонной плоскости и набирает скорость v непосредственно перед отрывом от плоскости и соударением с тележкой с песком массой m_2 , которая стоит неподвижно у подножья наклонной плоскости на горизонтальной поверхности. Нулевой уровень потенциальной энергии бруска соответствует его положению в момент отрыва от наклонной плоскости. Следует отметить, что в условиях данной задачи к бруску и тележке применима модель материальной точки, т.е. их размерами в условии задачи можно пренебречь. На рис. 3 слева представлена ситуация до соударения.

Справа на рис. 3 представлена ситуация непосредственно после соударения, когда брусок застрял в тележке с песком, и система начала движение как единое целое тело со скоростью u , направленной горизонтально вправо.

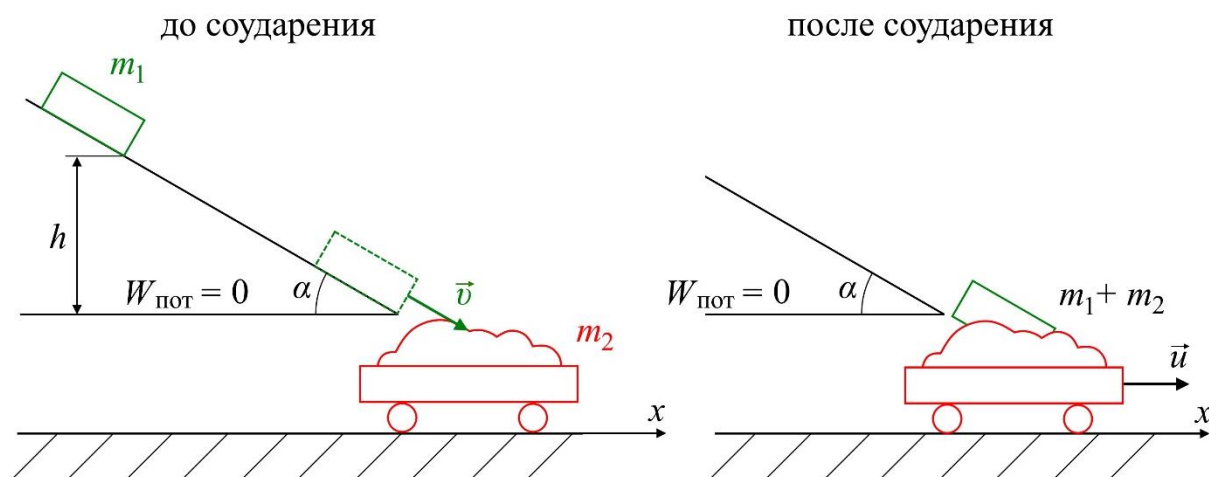


Рис. 3. Поясняющий рисунок

Движение тел в условии данной задачи следует рассмотреть в два этапа: скольжение бруска по наклонной плоскости с высоты h и абсолютно неупругое соударение бруска и тележки с песком.

На этапе скольжения бруска по гладкой наклонной плоскости выполняется закон сохранения механической энергии, т.к. работу совершает только сила тяжести, которая является потенциальной. При этом потенциальная энергия бруска переходит в его кинетическую энергию. Запишем закон сохранения механической энергии бруска в момент начала его скольжения и в момент отрыва от наклонной плоскости

$$m_1gh = \frac{m_1v^2}{2}. \quad (22)$$

Пользуясь выражением (22), найдём скорость бруска v в момент отрыва от наклонной плоскости

$$v = \sqrt{2gh}. \quad (23)$$

На этапе абсолютно неупругого соударения бруска и тележки с песком на систему действуют внешние силы: силы тяжести, сила нормальной реакции опоры и сила трения, действующая на тележку со стороны горизонтальной поверхности. Поскольку проекции сил тяжести и силы нормальной реакции опоры на горизонтальную ось x равны нулю, а проекция силы трения на ось x много меньше проекций внутренних сил на эту же ось, при этом время соударения мало, то можно считать, что проекция импульса системы «брусок-тележка» на ось x не изменяется за время взаимодействия. Запишем закон сохранения проекции импульса системы на ось x в момент непосредственно перед соударением и в момент сразу после соударения

$$m_1v\cos(\alpha) = (m_1 + m_2)u. \quad (24)$$

Пользуясь выражением (24), найдём скорость системы u в момент сразу после соударения

$$u = \frac{m_1 v \cos(\alpha)}{m_1 + m_2}, \quad (25)$$

с учётом (23) получим окончательное выражение для скорости u

$$u = \frac{m_1 \sqrt{2gh} \cos(\alpha)}{m_1 + m_2}. \quad (26)$$

Проведём расчёт значения u по формуле (26):

$$u = \frac{5 \cdot \sqrt{2 \cdot 9,8 \cdot 2} \cdot \cos(60^\circ)}{5 + 25} = 0,5218 \approx 0,52 \frac{\text{м}}{\text{с}}.$$

Ответ: А) $u = 0,52 \text{ м/с}$.

Типичные ошибки

1. Непонимание условий применимости законов сохранения.

Для того, чтобы понять можно ли применить в условии задачи закон сохранения импульса, необходимо выделить систему тел, определить действующие внутренние и внешние силы. Затем, на основе проведённого анализа, сделать вывод о том, соответствует ли рассматриваемая ситуация одному (или нескольким случаям) выполнения закона сохранения импульса, описанным выше в разделе «Законы сохранения в механике».

Для того, чтобы понять можно ли применить в условии задачи закон сохранения механической энергии, необходимо выделить систему тел, определить действующие потенциальные и непотенциальные силы, установить какие из них совершают работу. Затем, на основе проведённого анализа, сделать вывод о том, выполняется ли в рассматриваемой ситуации

закон сохранения механической энергии, описанный выше в разделе «Законы сохранения в механике».

2. Игнорирование векторного характера импульса и ошибки при записи проекций вектора.

Следует помнить, что импульс – векторная величина, а, соответственно, сложение и вычитание импульсов должно подчиняться правилам сложения и вычитания векторов. Если установлено, что в условии задачи сохраняется вектор импульса системы, то закон сохранения импульса сначала следует записать в векторном виде, а затем в проекциях на координатные оси. Если установлено, что сохраняется проекция импульса системы на какое-либо направление, то закон сохранения импульса следует записывать в проекциях на это направление. При определении проекции импульса на ось необходимо учитывать угол между вектором импульса и осью, а также помнить о знаке проекции.

Задание №8.

Вариант 1. Материальная точка массой $m = 0,1$ кг совершает гармонические колебания вдоль прямой. Уравнение колебаний имеет вид $x(t) = 0,2 \cdot \cos(0,5 \cdot t)$, все величины указаны в единицах СИ. Определите модуль равнодействующей сил, приложенных к телу, в первый с начала движения момент времени, когда модуль скорости тела станет равен половине её амплитудного значения. Ответ выразите в единицах СИ.

Вариант 2. Закон колебаний пружинного маятника имеет вид $x(t) = 0,2 \cdot \cos(0,5 \cdot t)$, все величины указаны в единицах СИ. Определите модуль ускорения тела в первый с начала движения момент времени, когда кинетическая энергия тела в 4 раза превышает потенциальную энергию растянутой пружины. Ответ выразите в единицах СИ.

Вариант 3. Тело малых размеров прикреплено к невесомой пружине и совершает гармонические колебания по закону $x(t) = 0,2 \cdot \cos(0,5 \cdot t)$, все величины указаны в единицах СИ. Определите отношение кинетической

энергии тела к потенциальной энергии растянутой пружины в первый с начала движения момент времени, когда модуль ускорения тела станет равным трети его амплитудного значения. Ответ выразите в единицах СИ.

Анализ уравнения колебаний

Уравнение гармонических колебаний имеет вид

$$x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad (27)$$

где x – координата материальной точки на оси OX , A – амплитуда колебаний, $(\omega \cdot t + \varphi_0)$ – фаза колебаний, ω – циклическая частота колебаний, φ_0 – начальная фаза колебаний при $t = 0$.

По условию задачи во всех трёх вариантах

$$x(t) = 0,2 \cdot \cos(0,5 \cdot t) \quad (28)$$

(все величины указаны в единицах СИ), отсюда получаем параметры колебаний в рассматриваемой задаче: $A = 0,2$ м; $\omega = 0,5$ рад/с; $\varphi_0 = 0$.

Исходя из определений кинематики, проекции векторов мгновенной скорости и ускорения тела в произвольный момент времени имеют вид

$$v_x(t) = x'(t) = -A \cdot \omega \cdot \sin(\omega \cdot t + \varphi_0), \quad (29)$$

$$a_x(t) = v_x'(t) = x''(t) = -A \cdot \omega^2 \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0). \quad (30)$$

Символами «'» и «''» обозначены первая и вторая производные физической величины по времени.

Согласно данным задачи

$$v_x(t) = -0,1 \cdot \sin(0,5 \cdot t), \quad (31)$$

$$a_x(t) = -0,05 \cdot \cos(0,5 \cdot t). \quad (32)$$

Из (31) и (32) находим амплитудные значения скорости и ускорения тела: $v_m = 0,1$ м/с; $a_m = 0,05$ м/с².

На рис. 4 приведём графики функций $x(t)$, $v_x(t)$, $a_x(t)$. Отметим, что величины x и a_x равны нулю всегда одновременно, и в эти же моменты модуль скорости тела принимает максимальное (амплитудное) значение. Напротив, когда проекция скорости v_x равна нулю, то в эти моменты модули координаты и ускорения принимают максимальное (амплитудное) значения.

Далее рассмотрим решения всех вариантов.

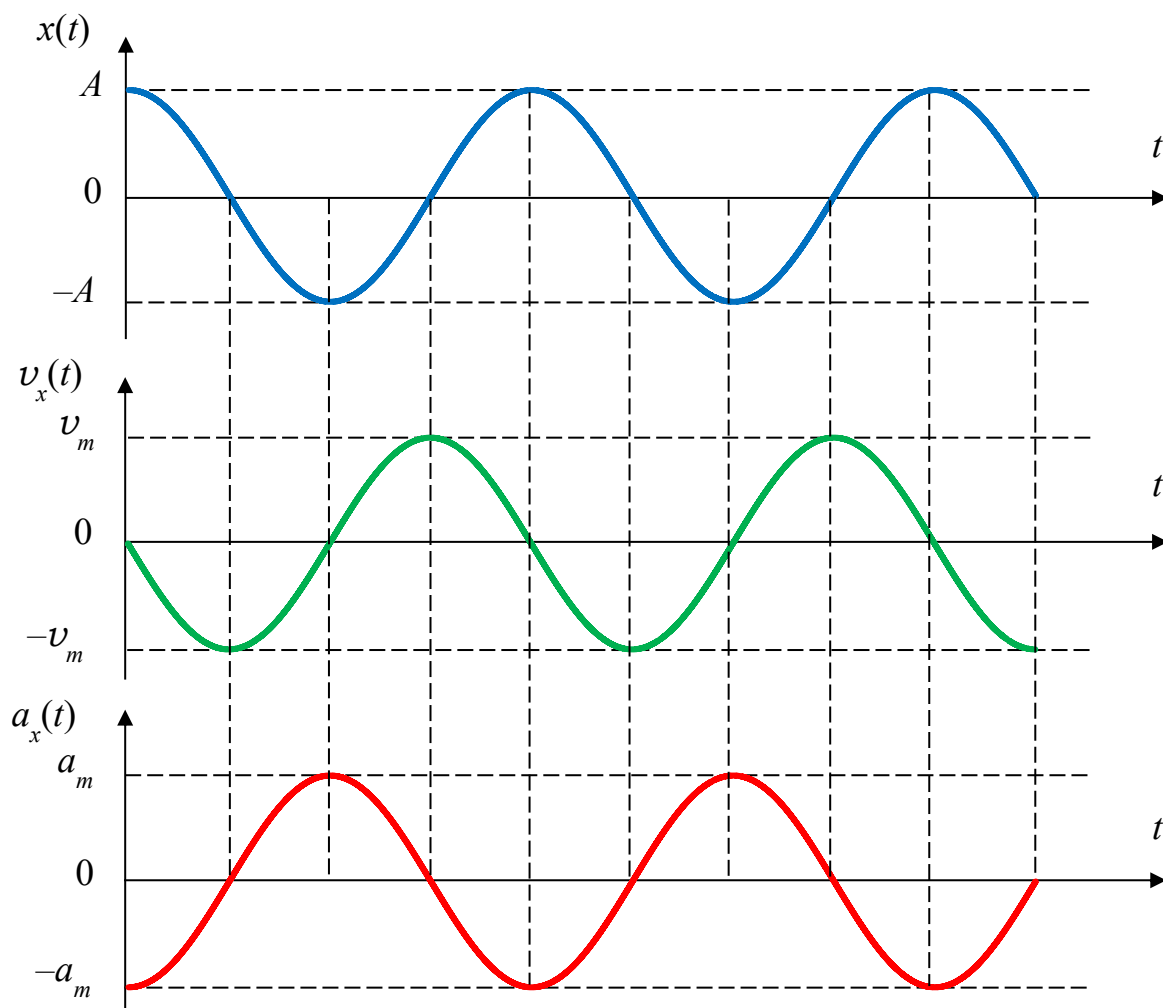


Рис. 4. Графики функций $x(t)$, $v_x(t)$, $a_x(t)$

Решение варианта 1. Необходимо определить модуль равнодействующей сил, приложенных к телу, в первый с начала движения момент времени, когда модуль скорости тела станет равен половине её амплитудного значения.

По второму закону Ньютона

$$\vec{F} = m\vec{a}, \quad (33')$$

где \vec{F} – равнодействующая сил, приложенных к телу, \vec{a} – ускорение тела. Поскольку материальная точка совершает прямолинейные колебания вдоль оси OX , векторы скорости и ускорения направлены также вдоль оси OX . Тогда модуль равнодействующей сил

$$F = ma = m \cdot |a_x|. \quad (33'')$$

Обозначим через t_1 первый с начала движения момент времени, когда модуль скорости тела станет равен половине её амплитудного значения. На рис. 5 приведём графики функций $v_x(t)$, $a_x(t)$ с указанием момента времени t_1 . Отметим, что обе эти величины принимают отрицательные значения в момент времени t_1 .

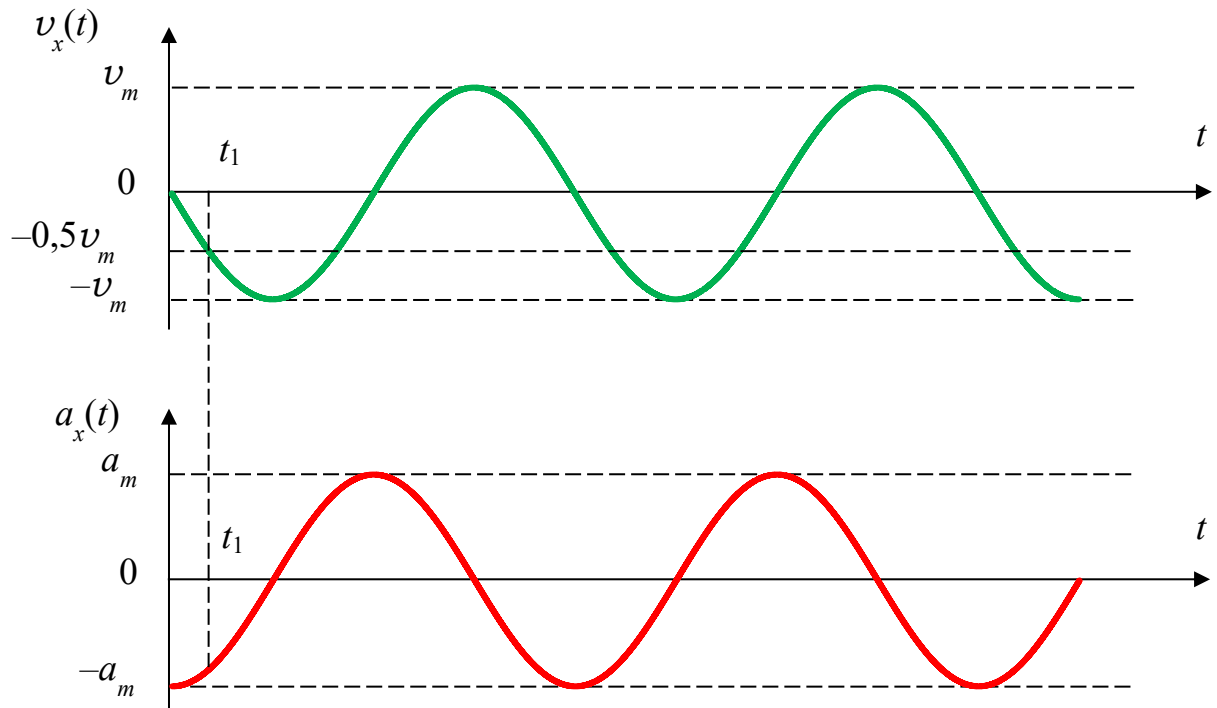


Рис. 5. Графики функций $v_x(t)$, $a_x(t)$

Решая уравнение (31) при условии, что $v_x(t) = -0,5 \cdot v_m = -0,05$ м/с, получим

$$-0,05 = -0,1 \cdot \sin(0,5 \cdot t_1), \quad (34)$$

откуда

$$\sin(0,5 \cdot t_1) = 0,5. \quad (35)$$

Применив основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, найдём

$$\cos(0,5 \cdot t_1) = \pm \frac{\sqrt{3}}{2}. \quad (36)$$

Подставив (36) в (32), с учётом знака $a_x(t_1)$ получим

$$a_x(t_1) = -0,05 \cdot \frac{\sqrt{3}}{2} = -0,043301 \text{ м/с}^2. \quad (37)$$

Модуль равнодействующей сил в момент времени t_1

$$F = m \cdot |a_x(t_1)| = -0,0043301 \text{ Н}. \quad (38)$$

Из предложенных вариантов ответов

А) 0,00433 Н;

Б) 0,005 Н;

В) 0,01 Н;

Г) 0,0433 Н;

Д) 0,2 Н;

Е) 0,5 Н

верным является вариант А.

Решение варианта 2. Необходимо определить модуль ускорения тела в первый с начала движения момент времени, когда кинетическая энергия тела в 4 раза превышает потенциальную энергию растянутой пружины.

Кинетическая энергия тела определяется выражением

$$W_k = \frac{m \cdot v^2}{2}, \quad (39)$$

где v – модуль скорости тела. Поскольку материальная точка совершает прямолинейные колебания вдоль оси OX , векторы скорости и ускорения направлены также вдоль оси OX . Тогда модули скорости и ускорения равны модулям их проекций на ось OX :

$$v = |v_x|. \quad (40)$$

$$a = |a_x|. \quad (41)$$

Потенциальная энергия растянутой пружины определяется выражением

$$W_{\Pi} = \frac{k \cdot (\Delta x)^2}{2}, \quad (42)$$

где k – коэффициент упругости (жёсткость) пружины, Δx – удлинение пружины. Положение равновесия определяется из условия равенства нулю

равнодействующей сил, приложенных к телу: $\vec{F} = 0$. По второму закону Ньютона (33) имеем $\vec{a} = 0$ или $a_x = 0$. Как было указано во вводной части, величины x и a_x равны нулю одновременно (см. также рис. 4). Таким образом, положение равновесия соответствует координате $x = 0$. Тогда удлинение пружины $\Delta x \equiv x$ и выражение (42) примет вид

$$W_{\Pi} = \frac{k \cdot x^2}{2}. \quad (43)$$

Обозначим через t_1 первый с начала движения момент времени, когда кинетическая энергия тела в 4 раза превышает потенциальную энергию растянутой пружины. По условию задачи

$$\frac{m \cdot v_x^2(t_1)}{2} = 4 \cdot \frac{k \cdot x^2(t_1)}{2}. \quad (44)$$

Подставим в (44) выражения (27) и (29) с учётом $\varphi_0 = 0$:

$$\frac{m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t_1)}{2} = 4 \cdot \frac{k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t_1)}{2}. \quad (45)$$

Известно, что циклическая частота колебаний пружинного маятника $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$. Тогда после сокращения величин в левой и правой частях равенства выражение (45) примет вид

$$\sin^2(\omega \cdot t_1) = 4 \cdot \cos^2(\omega \cdot t_1). \quad (46)$$

Применив основное тригонометрическое тождество $\sin^2\alpha + \cos^2\alpha = 1$, найдём

$$\begin{aligned} 1 - \cos^2(\omega \cdot t_1) &= 4 \cdot \cos^2(\omega \cdot t_1), \\ \cos^2(\omega \cdot t_1) &= 0,2. \end{aligned} \quad (47)$$

Модуль ускорения тела с учётом (32), (41) и (46) окажется равным

$$a(t_1) = 0,05 \cdot \sqrt{0,2} = 0,0224 \text{ м/с}^2. \quad (48)$$

Из предложенных вариантов ответов

А) $0,0224 \text{ м/с}^2$;

Б) $0,01 \text{ м/с}^2$;

В) $0,0447 \text{ м/с}^2$;

Г) $0,1 \text{ м/с}^2$;

Д) $0,0118 \text{ м/с}^2$;

Е) $0,2 \text{ м/с}^2$

верным является вариант А.

Решение варианта 3. Необходимо определить отношение кинетической энергии тела к потенциальной энергии растянутой пружины в первый с начала движения момент времени, когда модуль ускорения тела станет равным трети его амплитудного значения.

Обозначим через t_1 первый с начала движения момент времени, когда модуль ускорения тела станет равным трети его амплитудного значения, а отношение кинетической энергии тела к потенциальной энергии растянутой пружины в этот же момент времени – через n . Из выражения (32) с учётом знака величины $a_x(t_1)$ следует

$$-\frac{0,05}{3} = -0,05 \cdot \cos(0,5 \cdot t_1),$$
$$\cos(0,5 \cdot t_1) = \frac{1}{3}. \quad (49)$$

Применив основное тригонометрическое тождество $\sin^2 \alpha + \cos^2 \alpha = 1$, найдём

$$\sin(0,5 \cdot t_1) = \pm \frac{\sqrt{8}}{3}. \quad (50)$$

Воспользуемся выражениями (39), (40) и (43) для записи значений кинетической и потенциальной энергий:

$$n = \frac{\frac{m \cdot v^2(t_1)}{2}}{\frac{k \cdot x^2(t_1)}{2}} = \frac{m \cdot v^2(t_1)}{k \cdot x^2(t_1)}. \quad (51)$$

Подставим в (51) выражения (27) и (29) с учётом $\varphi_0 = 0$ и $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$:

$$n = \frac{m \cdot A^2 \cdot \omega^2 \cdot \sin^2(\omega \cdot t_1)}{k \cdot A^2 \cdot \cos^2(\omega \cdot t_1)} = \frac{\sin^2(\omega \cdot t_1)}{\cos^2(\omega \cdot t_1)} = 8. \quad (52)$$

Из предложенных вариантов ответов

А) 1;

Б) 2;

В) 4;

Г) 7;

Д) 8;

Е) 10

верным является вариант Д.

Ниже разобраны **типичные ошибки**, которые могут быть допущены при решении задачи.

1. При нахождении функций $v_x(t)$ и $a_x(t)$ достаточно знать, что $v_x(t) = x'(t)$ и $a_x(t) = v_x'(t) = x''(t)$. Не рекомендуется «заучивать» конечные выражения для $v_x(t)$ и $a_x(t)$.

2. Ошибки при дифференцировании функции $x(t)$ для определения функций $v_x(t)$, $a_x(t)$. Функция вида $x(t) = A \cdot \cos(\omega \cdot t + \varphi_0)$ представляет собой сложную функцию, требуется не забыть после дифференцирования основной функции $\cos()$ продифференцировать её аргумент $(\omega \cdot t + \varphi_0)$, а именно $(\omega \cdot t + \varphi_0)' = \omega$.

3. При дифференцировании функции $\cos()$ возникает знак « \rightarrow », т.к. $(\cos \alpha)' = -\sin \alpha$. Также при решении квадратного уравнения, получаемого из основного тригонометрического тождества, могут получиться два решения, отличающиеся только знаками. Однако в заданиях вариантов 1 и 2 требуется определить модуль искомой величины силы или ускорения, поэтому неучёт знака « \rightarrow » не приведёт к ошибке в решении (все предлагаемые ответы в каждом варианте содержат неотрицательные значения величин).

4. В условии каждого варианта все числовые значения величин указаны в единицах СИ, и ответ также должен быть выражен в единицах СИ. Таким

образом, дополнительные переводы величин в другие единицы в процессе решения не требуется. Необходимо только следить за корректностью самих вычислений.

Верные ответы на задания №7 и №8 оцениваются 5 баллами каждый.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

**по решению заданий №№ 9 и 10 по предмету «Математика»
в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных
навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»,
номинация «ИТ-класс»,
направления «Создание цифровых двойников»,
«Большие данные и технологии искусственного интеллекта»,
«Робототехника», «Информационная безопасность и технологии связи»**

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «ИТ-класс» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационных вариантов по предмету «Математика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Рассмотрим решение задания №9 трёх демонстрационных вариантов.

Вариант 1.

Суперкомпьютер «Слонёнок» тратит на решение задачи на 3 дня непрерывной работы больше, чем суперкомпьютер «Совёнок», а суперкомпьютер «Опёнок» – на 12 дней больше, чем «Совёнок». Если же суперкомпьютеры «Слонёнок» и «Опёнок» запустить совместно, то они затратят на решение задачи ровно столько же времени, сколько «Совёнок» (считается, что при совместной работе мощности суперкомпьютеров складываются). Сколько дней непрерывной работы потребуется суперкомпьютерам «Совёнок» и «Слонёнок» для совместного решения той же задачи? Ответ выразите в днях и округлите до десятых долей. В ответе укажите только число.

Решение.

Пусть t – время (в днях), которое тратит на решение задачи суперкомпьютер «Совёнок». Тогда суперкомпьютер «Слонёнок» затрачивает $(t + 3)$ дней, а «Опёнок» – $(t + 12)$ дней. Если принять объём работ за единицу, то скорость работы «Совёнка» в одиночку составит $1/t$, а «Слонёнка» и «Опёнка» совместно $\frac{1}{t+3} + \frac{1}{t+12}$. Эти скорости, согласно условию, равны. Остаётся решить уравнение

$$\frac{1}{t+3} + \frac{1}{t+12} = \frac{1}{t},$$

единственным положительным корнем которого является $t = 6$. Для поиска времени совместной работы вычисляем $\left(\frac{1}{6} + \frac{1}{9}\right)^{-1} = \frac{18}{5} = 3,6$.

Ответ: 3,6.

Вариант 2.

Первокурсница Аня пробегает коридор общежития из конца в конец на 9 секунд быстрее, чем второкурсник Ваня, и на 16 секунд быстрее, чем третьекурсник Саня. Если же Ваня и Саня побегут одновременно навстречу друг другу из разных концов коридора, то до их столкновения пройдёт такое же время, за которое Аня пробегает весь коридор. Какое время потребуется Ане и Ване, если они одновременно побегут из разных концов коридора, чтобы столкнуться лбами? Ответ выразите в секундах и округлите до десятых долей. В ответе укажите только число.

Решение.

Пусть t – время (в секундах), которое затрачивает на весь коридор Аня. Тогда Ваня затрачивает $(t + 9)$ с, а Саня – $(t + 16)$ с. Если принять длину коридора за единицу, то скорость сближения Вани и Сани составит $\frac{1}{t+9} + \frac{1}{t+16}$, а скорость Ани – $1/t$. Эти скорости, согласно условию, равны. Остаётся решить уравнение

$$\frac{1}{t+9} + \frac{1}{t+16} = \frac{1}{t},$$

единственным положительным корнем которого является $t = 12$. Для поиска времени до столкновения вычисляем $\left(\frac{1}{12} + \frac{1}{21}\right)^{-1} = \frac{84}{11} \approx 7,6$.

Ответ: 7,6.

Вариант 3.

Пончик и Сиропчик решили вместе позавтракать манной кашей. Ровно в семь утра Пончик приступил к трапезе, не дожидаясь товарища, который опоздал ровно на полчаса, но ел так быстро, что в итоге каши им досталось поровну. При этом в половине девятого было съедено ровно 55% каши. Во сколько раз прожорливость Пончика отличается от прожорливости Сиропчика? В ответе укажите отношение этих величин, округлённое до десятых долей. В ответе укажите только число.

Решение.

Примем весь объём каши за единицу. Пусть u и v – прожорливости Пончика и Сиропчика (в 1/ч). Тогда к половине девятого было съедено $(1,5u + 1v)$ каши, что составляет 0,55 её объёма. На поедание половины всей каши Пончик затратил $1/u$ часов, а Сиропчик – $1/v$ часов, что на полчаса меньше Пончика. Получаем систему уравнений

$$\begin{cases} 1,5u + 1v = 0,55, \\ \frac{1}{2u} - \frac{1}{2v} = \frac{1}{2}, \end{cases}$$

решением которой являются $u = 0,2$ и $v = 0,25$.

Для ответа остаётся найти отношение этих величин $\frac{u}{v} = \frac{4}{5} = 0,8$.

Ответ: 0,8.

Методический комментарий

Данная задача является достаточно стандартной текстовой задачей на движение или совместную работу, математическая составляющая решения которой сводится к решению квадратного уравнения для одного из параметров. Для построения математической модели описываемого в условии процесса достаточно знать интуитивно понятные формулы

$$\langle \text{расстояние} \rangle = \langle \text{скорость} \rangle * \langle \text{время} \rangle,$$

$$\langle \text{объём работы} \rangle = \langle \text{производительность} \rangle * \langle \text{время} \rangle,$$

которые, по большому счёту, являются разновидностями единой закономерности. Предварительно можно составить таблицу, содержащую информацию о рассматриваемых величинах для двух участников действия. Однако, составление подобной таблицы не является обязательным элементом решения и не всегда упрощает анализ данных.

В процессе решения необходимо обратить внимание на следующие моменты, которые помогут избежать **типичных ошибок**.

1. Анализ единиц измерения. Необходимо следить за тем, чтобы все данные были приведены к единой системе мер, которая не обязательно должна совпадать с СИ. Например, можно измерять скорость в «коридорах в секунду» или принимать полный объём работ за единицу.

2. Грамотный выбор неизвестных величин. В зависимости от того, какие неизвестные войдут в окончательную математическую модель (систему уравнений) – скорость или время, время или производительность – эта система может оказаться сложнее или проще для решения.

3. Выбор порядка действий при решении системы. Если вопрос ставится только об одной из неизвестных величин, то их редукцию можно начать с той, которая заведомо не подходит под вопрос задачи.

4. Анализ диапазона возможных значений введённых неизвестных. Имеется важное различие между задачами о движении и задачами о совместной работе. Если скорость может иметь любой знак, который соответствует направлению движения, то производительность (аналог скорости) может быть только неотрицательной. Именно это условие часто позволяет произвести отбор одного решения из нескольких найденных.

5. Проверка полученного ответа. Описанный ход решения задачи позволяет осуществлять многоэтапный самоконтроль. Полученные значения неизвестных можно подставить сначала в квадратное уравнение (проверить верность его решения), а затем – в составленную по условию систему уравнений (проверить тем самым верность преобразований уравнений). Но

самое важное – подставить найденные значения непосредственно в условия задачи, что позволит проверить верность построения математической модели (системы уравнений) задачи. Несмотря на то, что находить все неизвестные не требуется, для полной проверки рекомендуется найти их все (при наличии времени).

Перейдём к рассмотрению задания №10 демонстрационных вариантов.

Вариант 1.

Найдите все корни уравнения

$$x^3 - 7|x| - 6 = 0.$$

В ответе запишите их сумму, округлённую до ближайшего целого.

Решение.

При положительных x уравнение можно записать как $x^3 - 7x - 6 = 0$. Согласно теореме Виета свободный член является произведением корней, поэтому попробуем подставлять целочисленные значения x (делители шести). Убеждаемся, что $x = 3$ – корень. Разделив многочлен $x^3 - 7x - 6$ на $(x - 3)$, получим $x^3 - 7x - 6 = (x^2 + 3x + 2)(x - 3)$. Выражение $x^2 + 3x + 2$ при $x = 0$ даёт 2, следовательно, положительных корней не имеет. Таким образом, заданное уравнение имеет единственный положительный корень $x = 3$.

При отрицательных x уравнение можно записать как $x^3 + 7x - 6 = 0$. Оно эквивалентно уравнению

$$x^3 = 6 - 7x.$$

Левая часть последнего уравнения при отрицательных x отрицательна, в то время как правая – положительна. Следовательно, при $x < 0$ уравнение корней не имеет. Ноль также не является его корнем.

Ответ: 3.

Вариант 2.

Найдите все корни уравнения

$$|6 - 7x| + x^3 = 0.$$

В ответе запишите модуль их суммы, округлённой до ближайшего целого.

Решение.

При положительных x левая часть уравнения положительна, следовательно, корней не имеет.

При отрицательных x уравнение можно записать как

$$x^3 - 7x + 6 = 0.$$

Согласно теореме Виета свободный член является произведением корней, поэтому попробуем подставлять целочисленные значения x (делители шести). Убеждаемся, что $x = 1$ – корень. Разделив многочлен $x^3 - 7x + 6$ на $(x - 1)$, получим $x^3 - 7x + 6 = (x^2 + x - 6)(x - 1)$. Выражение в первых скобках имеет корни $x = 2$ и $x = -3$. Нам подходит только отрицательный.

Таким образом, исходное уравнение имеет единственный корень $x = -3$. Нужно записать модуль суммы корней, поэтому получаем $|-3| = 3$.

Ответ: 3.

Вариант 3.

Найдите все корни уравнения

$$|x|^3 - 7x + 6 = 0.$$

В ответе запишите их количество. В поле ответа укажите только число.

Решение.

При положительных x уравнение можно записать как $x^3 - 7x + 6 = 0$. Согласно теореме Виета свободный член является произведением корней, поэтому попробуем подставлять целочисленные значения x (делители шести). Убеждаемся, что $x = 1$ – корень. Разделив многочлен $x^3 - 7x + 6$ на $(x - 1)$, получим $x^3 - 7x + 6 = (x^2 + x - 6)(x - 1)$. Выражение в первых скобках имеет корни $x = 2$ и $x = -3$, однако отрицательные не удовлетворяют уравнению с модулем.

При отрицательных x уравнение можно записать как

$$-x^3 = 7x - 6.$$

Левая часть последнего уравнения при отрицательных x положительна, в то время как правая – отрицательна. Следовательно, при $x < 0$ уравнение корней не имеет. Ноль также не является его корнем.

Ответ: 2.

Методический комментарий

Для успешного решения данной задачи необходимо хорошо представлять свойства кубического многочлена и его графика. Приведённые выше решения носят аналитический характер, в них исследуется поведение отдельных частей уравнения. Те же самые рассуждения можно провести, рассматривая график частей функции, поскольку любое уравнение вида $f(x) = 0$ можно привести к виду $g(x) = h(x)$.

В процессе решения необходимо обратить внимание на следующие моменты, которые могут оказаться источниками **типичных ошибок**.

1. Наличие модуля в любых слагаемых кубического четырёхчлена нарушает многие классические свойства, имеющиеся у многочленов, поскольку после раскрытия модуля заданная функция будет совпадать с разными многочленами в области положительных и в области отрицательных значений аргумента.

2. Теорема Виета для многочленов любой степени (в частности, для кубических) перестаёт быть справедливой при добавлении модуля в формулу рассматриваемой функции.

3. Анализ корней функции часто может быть сведён к анализу пересечения графиков двух функций более простой структуры и наоборот.

4. Необходимо понимать связь между фактами смены знака и наличием корней. Отрезок, на концах которого функция принимает значения разных знаков, может содержать несколько корней.

5. После получения ответа рекомендуется сделать проверку: подставить все найденные корни в функцию и убедиться в её занулении.

Также для выполнения подобного задания необходимо хорошо разбираться в свойствах элементарных функций и уметь строить эскизы их графиков. Приведём краткую информацию о них.

График линейной функции

Линейная функция задаётся уравнением $y = kx + b$, где k и b – любые действительные числа. Графиком линейной функции является прямая. Пример графика линейной функции $y = 2x - 1$ приведён на рис. 6.

Если $k = 0$, то функция $y = b$ называется постоянной. Её графиком является прямая, параллельная оси OX .

Если $b = 0$, то формула $y = kx$ задаёт прямо пропорциональную зависимость. Графиком такой функции является прямая, проходящая через начало координат.

Верно и обратное – любая прямая, не параллельная оси OY , является графиком некоторой линейной функции.

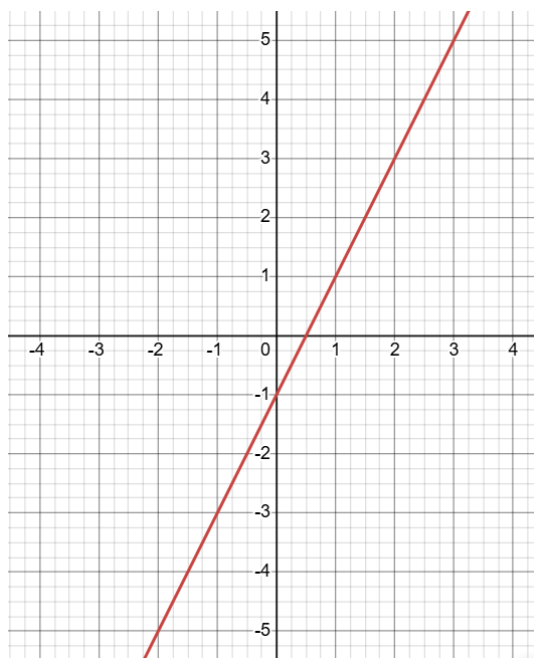


Рис. 6. График линейной функции $y = 2x - 1$

Число k называется угловым коэффициентом прямой, оно равно тангенсу угла между прямой и положительным направлением оси OX .

Перечислим свойства линейной функции при $k \neq 0$.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

2) Функция $y = kx + b$ не ограничена.

3) Функция $y = kx + b$ ни чётна, ни нечётна при $b \neq 0$, нечётна при $b = 0$.

4) При $k > 0$ функция монотонно возрастает, а при $k < 0$ монотонно убывает на всей области определения.

График квадратичной функции

График квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) представляет собой параболу. Рассмотрим простейший случай $y = x^2$. График такой функции приведён на рис. 7.

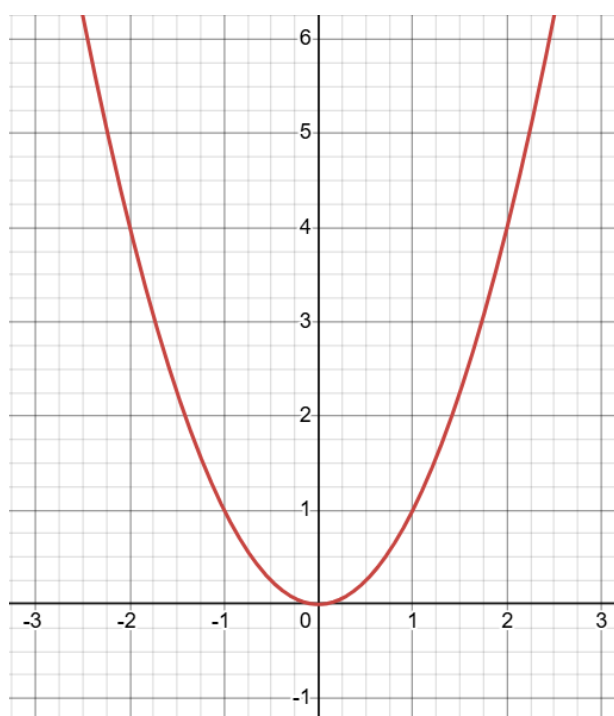


Рис. 7. График квадратичной функции $y = x^2$

Обозначим свойства функции $y = x^2$.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

2) Область значений функции – положительная полупрямая $[0, \infty)$.

3) Функция $y = x^2$ является чётной.

4) На промежутке $(-\infty, 0)$ функция монотонно убывает. На промежутке $(0, +\infty)$ функция монотонно возрастает.

5) В точке $x = 0$ достигает минимального значения. Точка с координатами $(0, 0)$ является вершиной параболы.

6) Функция непрерывна на всей области определения.

Для квадратичной функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) справедливо следующее: если $a > 0$, то ветви параболы направлены вверх, если $a < 0$, то ветви параболы направлены вниз. Рассмотрим для примера график функции $y = -x^2 + 4x - 3$ (рис. 8).

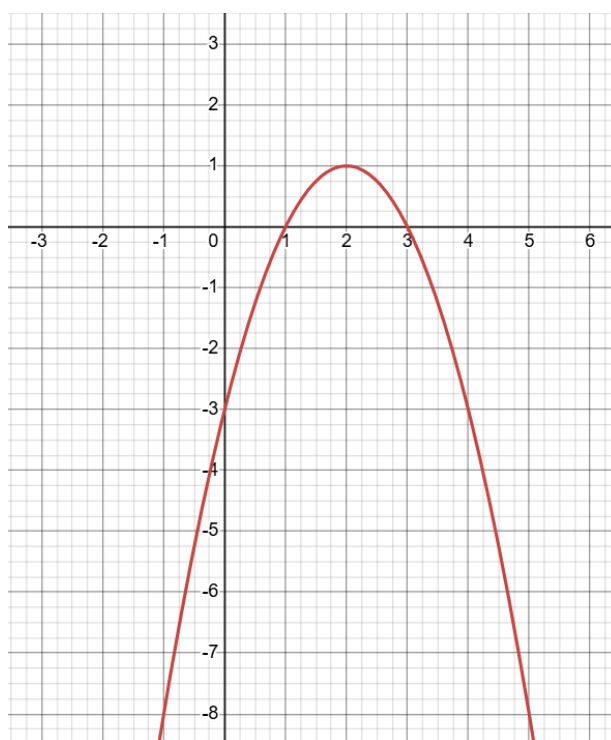


Рис. 8. График квадратичной функции $y = -x^2 + 4x - 3$.

Свойства функции $y = ax^2 + bx + c$ ($a \neq 0$) следующие.

1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.

2) Область значений функции зависит от знака коэффициента a .

3) В общем случае функция $y = ax^2 + bx + c$ не является ни чётной, ни нечётной. Осью симметрии параболы является прямая $x = -b/2a$. Функция

будет чётной только в случае, когда эта прямая совпадает с осью OY , т.е. при $b = 0$.

4) При $a > 0$ функция монотонно убывает на промежутке $(-\infty, -b/2a)$ и монотонно возрастает на промежутке $(-b/2a, \infty)$. При $a < 0$ функция монотонно возрастает на промежутке $(-\infty, -b/2a)$ и монотонно убывает на промежутке $(-b/2a, \infty)$.

5) В точке $x = -b/2a$ при $a < 0$ достигается максимум, а при $a > 0$ – минимум функции.

6) Функция непрерывна на всей области определения.

7) Парабола пересекает ось ординат в точке $(0, c)$. Если квадратный трёхчлен имеет действительные корни $x_1 \neq x_2$, то парабола пересекает ось абсцисс в точках $(x_1, 0)$ и $(x_2, 0)$. При $x_1 = x_2$ парабола касается оси абсцисс в точке $(x_1, 0)$. Если действительных корней нет, парабола не имеет общих точек с осью абсцисс.

График кубической функции

Кубическая парабола задаётся функцией $y = x^3$, её график приведён на рис. 9.

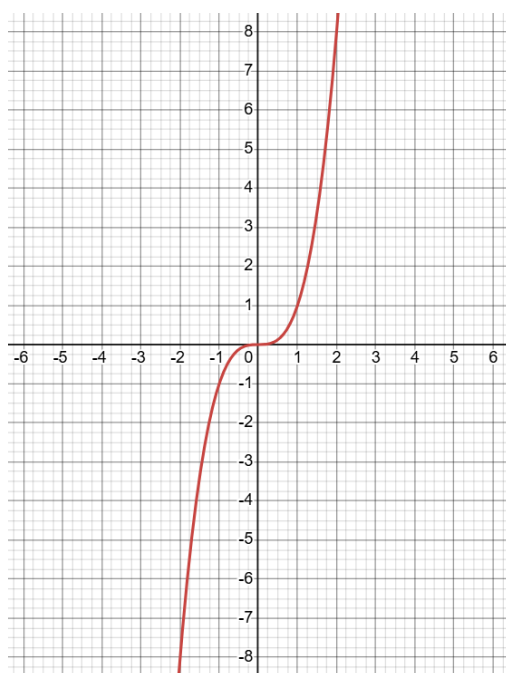


Рис. 9. График кубической функции $y = x^3$

Свойства функции $y = x^3$ обозначены ниже.

- 1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.
- 2) Функция $y = x^3$ не ограничена.
- 3) Данная функция является нечётной.
- 4) Функция $y = x^3$ возрастает на всей области определения.
- 5) Функция непрерывна на всей области определения.

Рассмотрим график функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ ($a \neq 0$).
Например, для функции $y = -x^3 + 3x^2 - 2$ график имеет следующий вид (рис. 10).

В этом примере коэффициент при старшей степени $a < 0$, поэтому график развёрнут «наоборот».

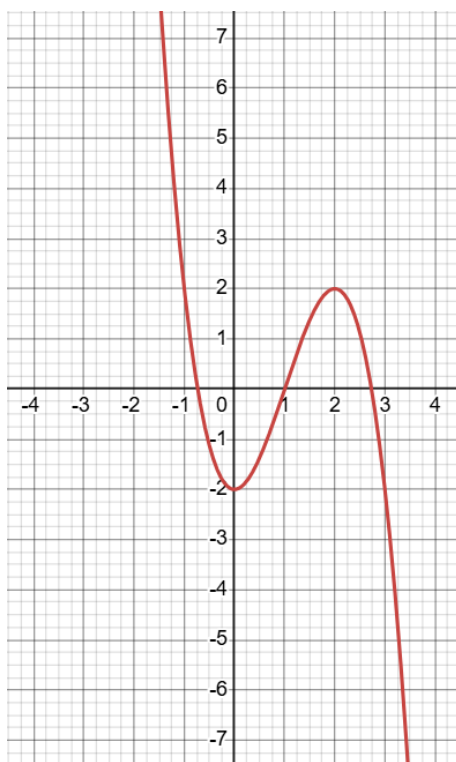


Рис. 10. График кубической функции $y = -x^3 + 3x^2 - 2$

График функции $y = ax^3 + bx^2 + cx + d$ может иметь различный вид. Он всегда пересекает ось OX по крайней мере в одной точке, но может иметь и две, и три точки пересечения. Всегда имеет ровно одну точку перегиба.

Может либо совсем не иметь локальных экстремумов, либо имеет один максимум и один минимум.

График функции $y = |x|$

График функции $y = |x|$ приведён на рис. 11.

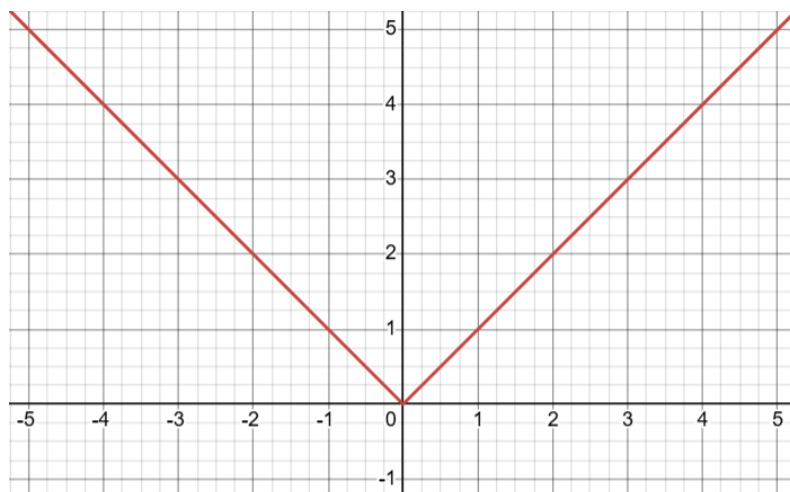


Рис. 11. График функции $y = |x|$

Перечислим свойства функции $y = |x|$.

- 1) Область определения функции – множество всех действительных чисел $(-\infty, \infty)$.
- 2) Область значений функции – положительная полупрямая $[0, \infty)$.
- 3) Функция $y = |x|$ является чётной.
- 4) На промежутке $(-\infty, 0)$ функция монотонно убывает. На промежутке $(0, +\infty)$ функция монотонно возрастает.
- 5) Функция непрерывна на всей области определения.

Основные преобразования графиков выполняются следующим образом.

Построение графика функции $y = -f(x)$

Чтобы построить график функции $y = -f(x)$, достаточно отразить график функции $Y = f(x)$ относительно оси ОХ.

Для примера рассмотрим графики следующих функций: $Y = x^2 + 2x$ (рис. 12) и $y = -(x^2 + 2x)$ (рис. 13).

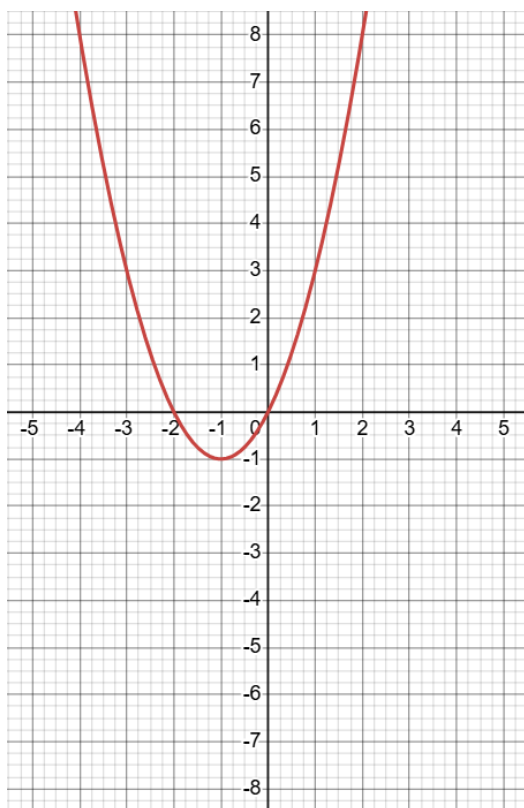


Рис. 12. График функции $Y = x^2 + 2x$

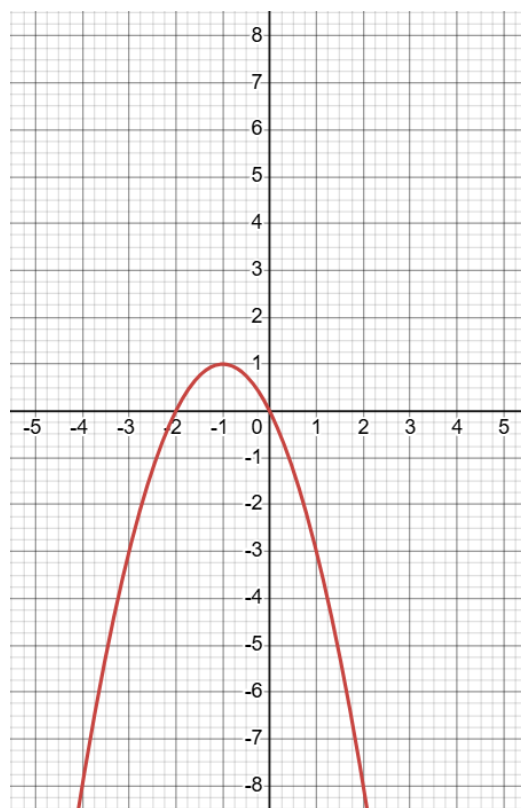


Рис. 13. График функции $y = -(x^2 + 2x)$

Построение графика функции $y = A \cdot f(x)$

Каждая ордината нового графика получается умножением соответствующей ординаты старого графика на A , то есть график растягивается от оси абсцисс (или сжимается к ней).

Таким образом, чтобы построить график функции $y = A \cdot f(x)$, достаточно растянуть график функции $Y = f(x)$ от оси абсцисс в A раз. При этом, если $A > 1$, то будет растяжение, при $0 < A < 1$ – сжатие. В случае, когда $A < 0$, к указанному преобразованию следует добавить ещё преобразование симметрии относительно оси OX .

Для примера рассмотрим графики следующих функций: $Y = |x + 1|$ (рис. 14), $y = 2|x + 1|$ (рис. 15), $y = 0.5|x + 1|$ (рис. 16).

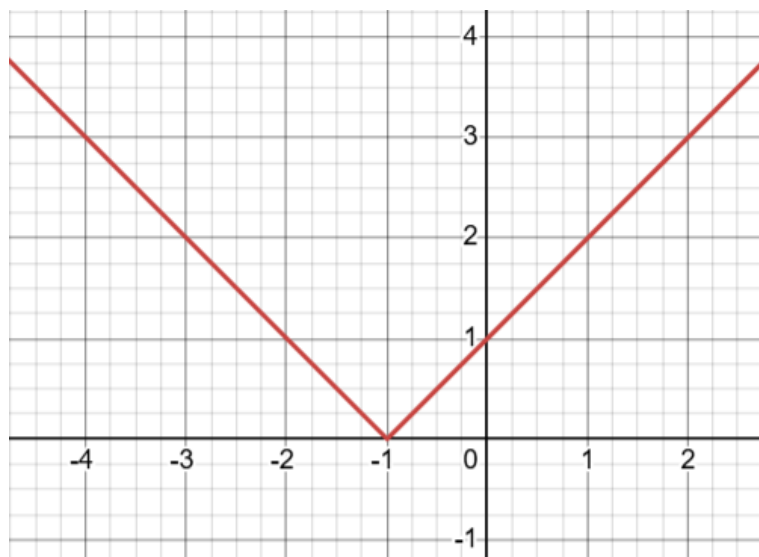


Рис. 14. График функции $Y = |x + 1|$

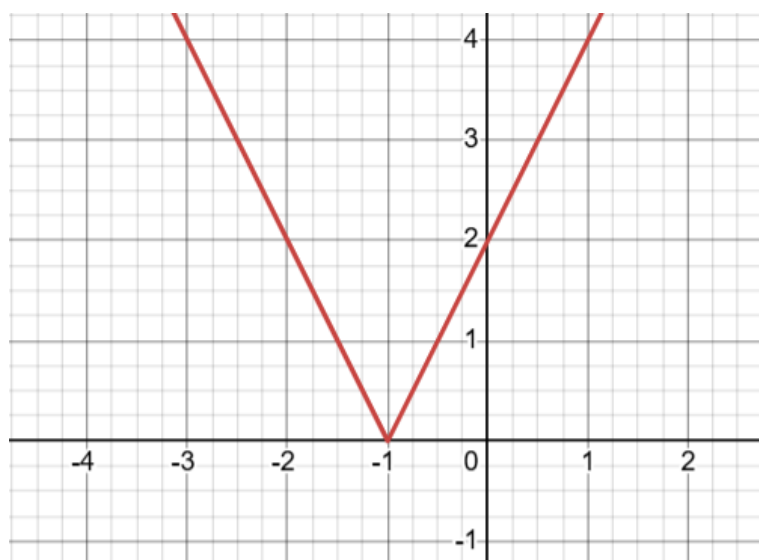


Рис. 15. График функции $y = 2|x + 1|$

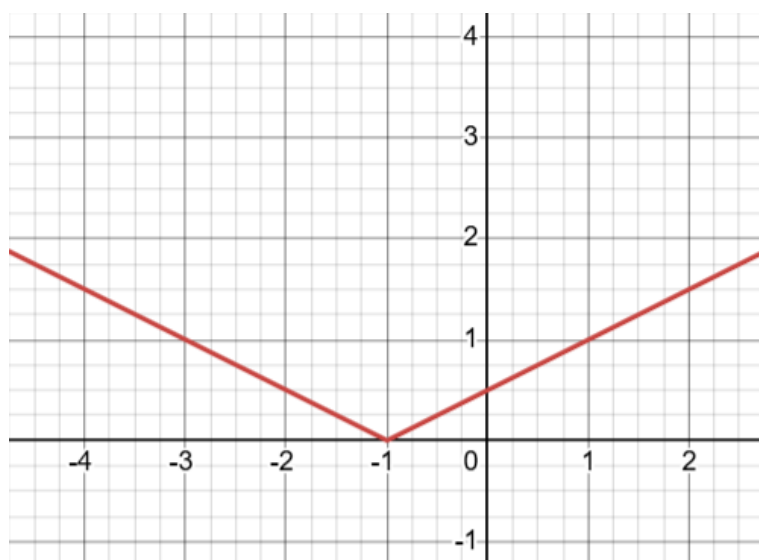


Рис. 16. График функции $y = 0.5|x + 1|$

Построение графика функции $y = f(-x)$

Чтобы построить график функции $y = f(-x)$, достаточно отразить график функции $Y = f(x)$ относительно оси ОУ.

Для примера рассмотрим графики следующих функций: $Y = x^3 + 1$ (рис. 17) и $y = (-x)^3 + 1$ (рис. 18).

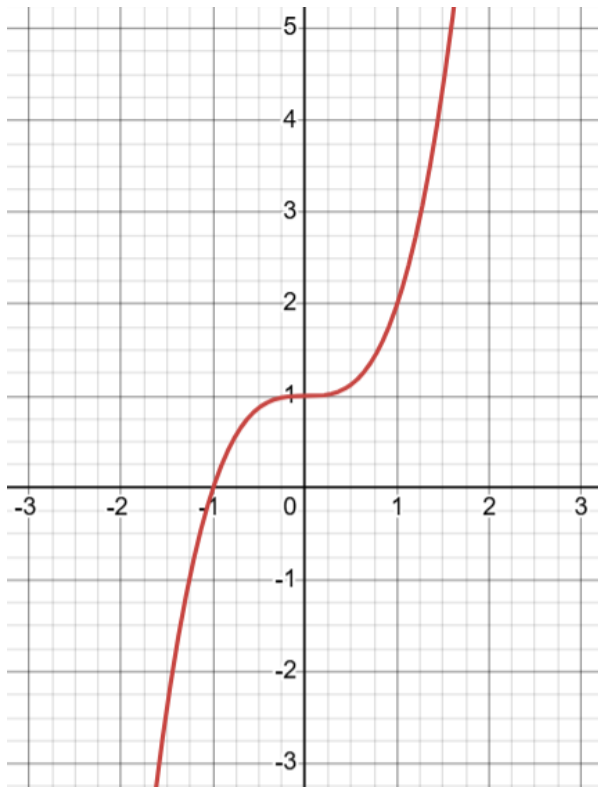


Рис. 17. График функции $Y = x^3 + 1$

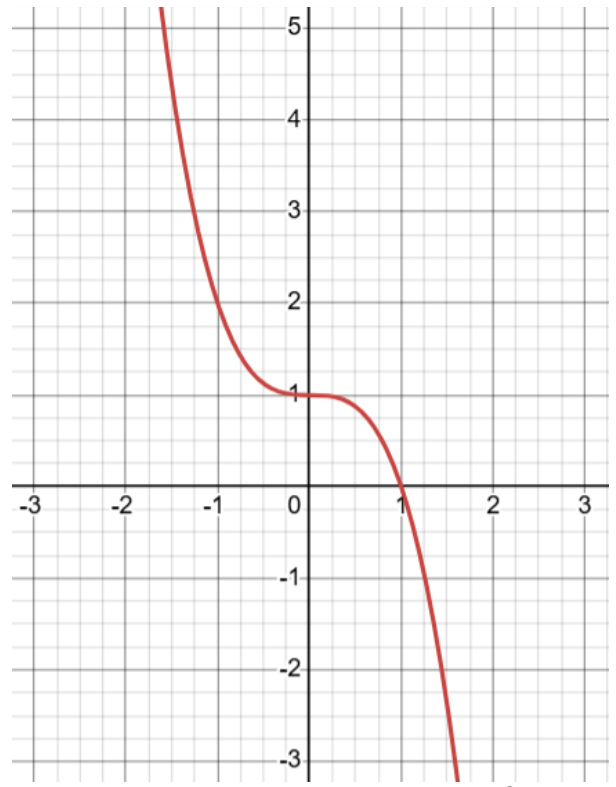


Рис. 18. График функции $y = (-x)^3 + 1$

Построение графика функции $y = f(a \cdot x)$

Для того, чтобы построить график функции $y = f(a \cdot x)$ достаточно равномерно в a раз сжать к оси ординат график функции $Y = f(x)$. При этом, если $a > 1$, то происходит сжатие, при $0 < a < 1$ – растяжение. Если $a < 0$, то необходимо ещё построить отображение последнего графика относительно оси ординат.

Для примера рассмотрим графики следующих функций: $Y = (x)^2 + 1$ (рис. 19), $y = (2x)^2 + 1$ (рис. 20), $y = (0.5x)^2 + 1$ (рис. 21).

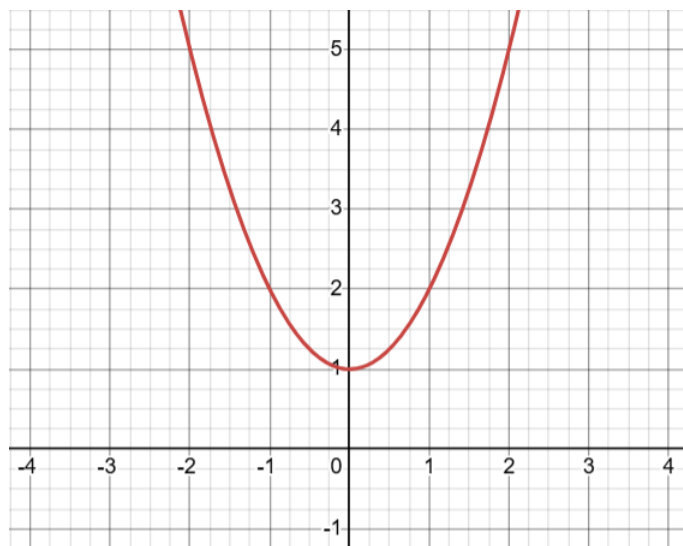


Рис. 19. График функции $Y = (x)^2 + 1$

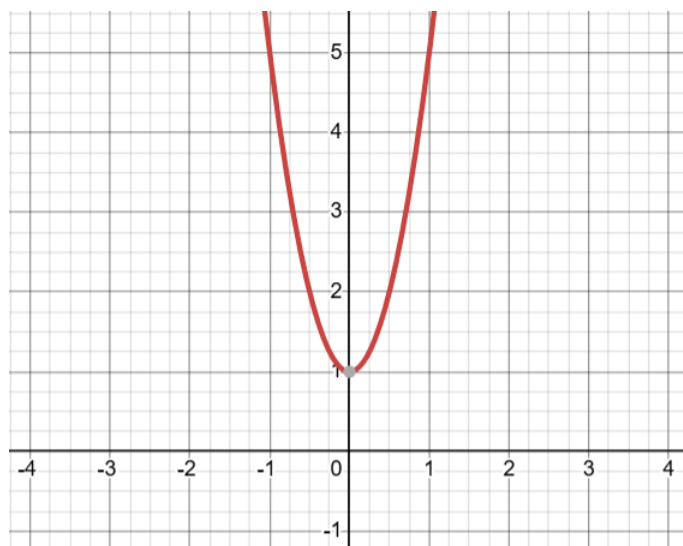


Рис. 20. График функции $y = (2x)^2 + 1$

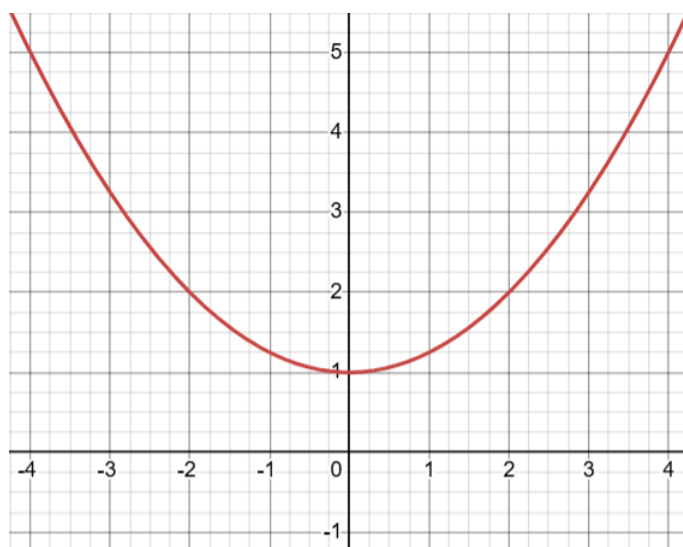


Рис. 21. График функции $y = (0.5x)^2 + 1$

Построение графика функции $y = f(x + b)$

Для того, чтобы построить график функции $y = f(x + b)$ достаточно график функции $Y = f(x)$ сдвинуть по оси OX на b единиц влево, если $b > 0$, или на b единиц вправо, если $b < 0$.

Для примера рассмотрим графики следующих функций: $Y = |x|$ (рис. 22) и $y = |x + 1|$ (рис. 23).

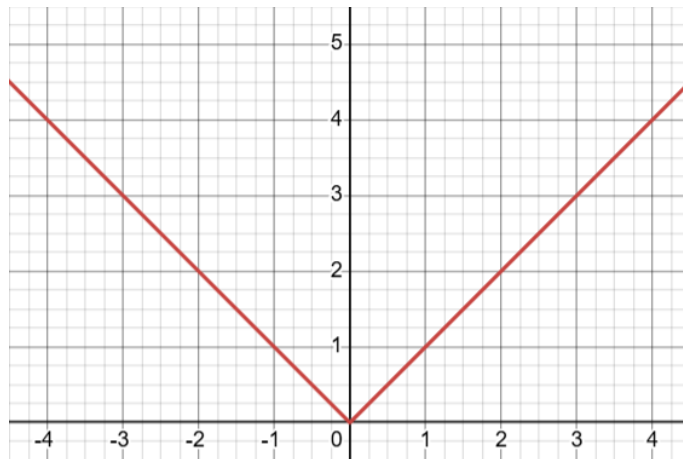


Рис. 22. График функции $Y = |x|$

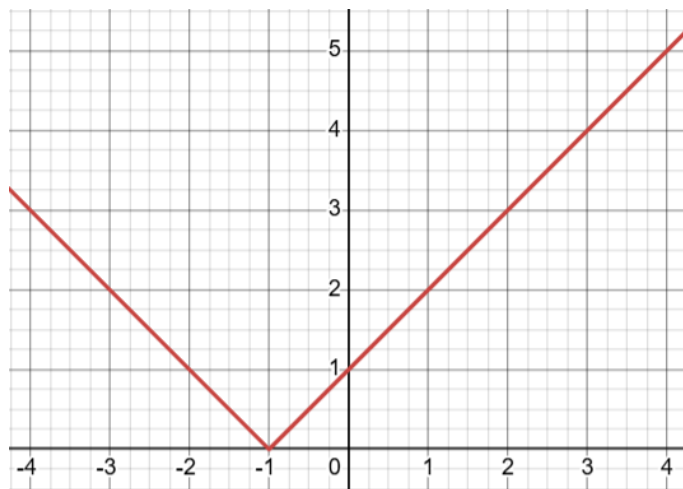


Рис. 23. График функции $y = |x + 1|$

Построение графика функции $y = f(x) + C$

Каждая ордината нового графика отличается от ординат старого графика ровно на C единиц. Таким образом, чтобы построить график функции $y = f(x) + C$ достаточно график функции $Y = f(x)$ сдвинуть по оси OY на C единиц вверх, если $C > 0$, или на C единиц вниз – в противном случае.

Для примера рассмотрим графики следующих функций: $Y = x^3$ (рис. 24) и $y = x^3 + 2$ (рис. 25).

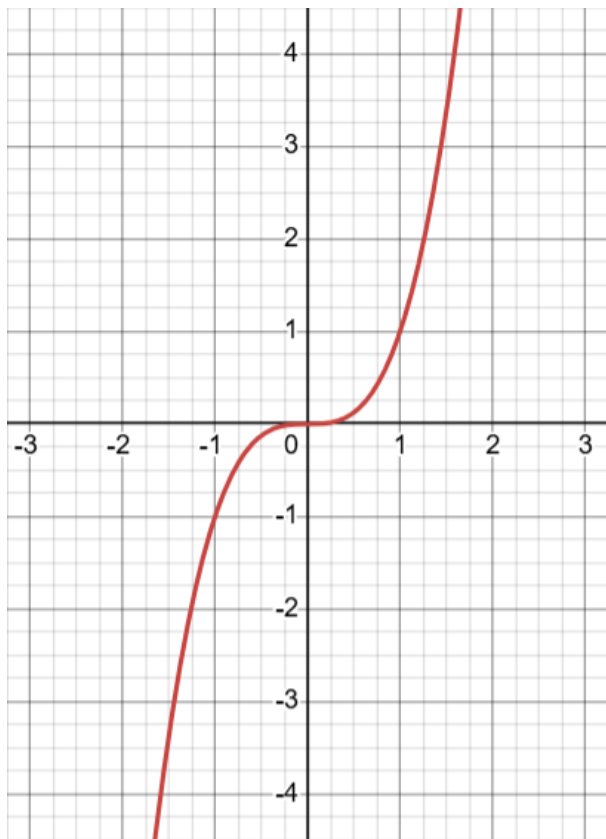


Рис. 24. График функции $Y = x^3$

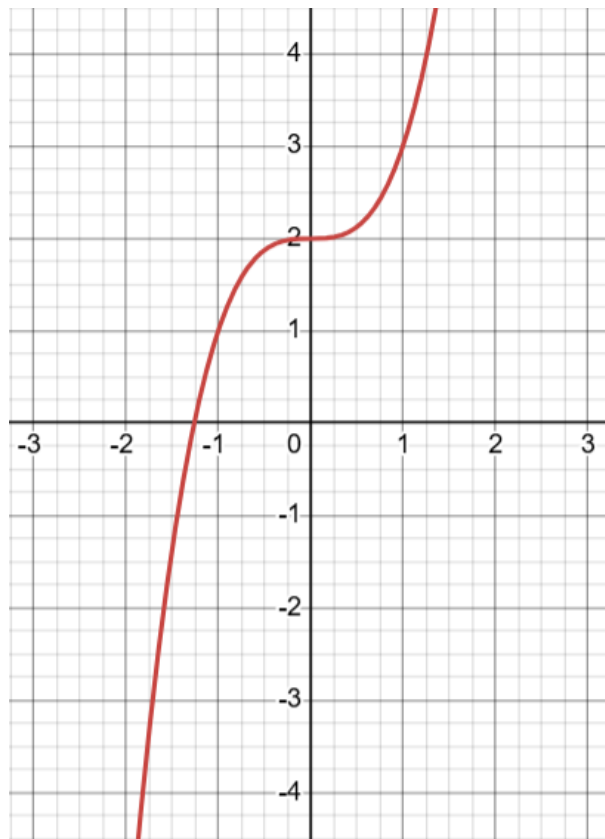


Рис. 25. График функции $y = x^3 + 2$

Перечисленных свойств достаточно для решения задачи с аналогичным условием, но другими функциями в формулах.

Для получения баллов участнику достаточно решить любое из двух заданий (№9 или №10) на выбор, верный ответ оценивается в 8 баллов.

МЕТОДИЧЕСКИЕ РЕКОМЕНДАЦИИ

**по решению заданий №№ 11 и 12 по предмету «Информатика»
в рамках теоретического этапа Московского конкурса межпредметных
навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал»,
номинация «ИТ-класс»,
направления «Создание цифровых двойников»,
«Большие данные и технологии искусственного интеллекта»,
«Робототехника», «Информационная безопасность и технологии связи»**

Методические рекомендации по использованию демонстрационных материалов и проведению теоретического этапа Московского конкурса межпредметных навыков и знаний «Интеллектуальный мегаполис. Потенциал» в номинации «ИТ-класс» (далее – Конкурс) предназначены для участников Конкурса и учителей, ведущих профильную подготовку учащихся предпрофессиональных классов, с целью разъяснения хода решения заданий демонстрационных вариантов по предмету «Информатика», возможных трудностей при подготовке к Конкурсу, типичных ошибок, методики оценки.

Рассмотрим решение задания №11 трёх демонстрационных вариантов.

Для решения задания № 11 требуется знать основные понятия компьютерных сетей, такие как «IP-адрес узла», «адрес подсети», «маска подсети» и др., разбираться в базовых принципах построения адресов в сети Интернет для протокола IPv4, а также уметь определять адрес сети по IP-адресу узла и маске сети, вычислять количество хостов в подсети по её адресу.

IP-адрес – уникальный сетевой адрес узла в компьютерной сети, построенной на основе стека протоколов TCP/IP. IP-адрес представляет собой серию из 32 двоичных бит (единиц и нулей).

В привычном нам виде IP-адрес состоит из четырёх частей (октетов), записанных в виде десятичных чисел с точками. Каждый октет может

принимать в десятичном виде значения от 0 до 255 или в двоичном виде – от 0000 0000 до 1111 1111.

Например, IP-адрес узла 192.169.170.121 в двоичном виде будет иметь следующее представление: 11000000.10101001.10101010.01111001.

Сеть – это та часть IP, которая не меняется во всей сети, и все адреса устройств начинаются именно с номера сети.

$$93.124.227.0 \Leftrightarrow 01011101.01111100.11100011.00000000$$

Узел – это изменяющаяся часть IP. Каждое устройство имеет свой уникальный адрес в сети, он называется узлом.

$$93.124.227.1 \Leftrightarrow 01011101.01111100.11100011.00000001$$

Маска подсети может также быть представлена в двоичном виде. Она включает в себя 32 бита. Если бит в маске подсети равен «1», то соответствующий бит IP-адреса является частью адреса сети. Если же бит в маске подсети равен «0», то соответствующий бит IP-адреса является частью идентификатора узла.

$$255.255.255.0 \Leftrightarrow 11111111.11111111.11111111.00000000$$

Маску подсети обычно записывают в виде префикса «/X» после адреса подсети, где X – длина маски в битах. Например, в записи 93.124.227.0/**24** значение /**24** – это маска, равная 255.255.255.0.

Рассмотрим следующее адресное пространство (Таблица 1).

Таблица 1. Пример адресного пространства

Адрес сети	93.124.227.0
Маска	255.255.255.0
IP адрес узла	93.124.227.6
Broadcast	93.124.227.255
Минимальный IP	93.124.227.1
Максимальный IP	93.124.227.254

Исходя из свойств маски, под адресацию устройств в данной сети выделен последний октет. Напомним, что *адрес сети* – это первый IP-адрес, у которого все биты номера узла равны нулю, а *широковещательный адрес* – это IP-адрес, у которого все биты узла равны 1 (или 255 в десятичной системе счисления), отсюда имеем адрес сети – 93.124.227.0 и широковещательный (broadcast) адрес – 93.124.227.255.

Так как они не могут быть присвоены узлам сети, минимальный адрес, который может быть присвоен устройству нашей сети, – 93.124.227.1, а максимальный – 93.124.227.254.

Количество доступных подсетей равно 2^{32-s} , где s – количество бит, используемых для сетевой части адреса (в нашем случае, 2^{32-24}).

В то же время, *количество узлов во всей сети* равно $2^n - 2$, где:

- n – количество бит, оставшихся в части, идентифицирующей узел или число нулевых битов маски;
- 2 адреса зарезервированы (адрес подсети и широковещательный адрес).

Таким образом, количество узлов данной сети равно 254.

Рассмотрим условия трёх задач под №11 демонстрационных вариантов.

Вариант 1. По заданным IPv4-адресам двух узлов, принадлежащих одной подсети, найдите адрес сети с наименьшим количеством хостов.

IP-адрес узла 1: 192.169.170.31.

IP-адрес узла 2: 192.169.170.21.

Выберите один верный вариант ответа:

А) 192.169.170.0/24;

Б) 192.169.170.0/26;

В) 192.169.170.0/27;

Г) 192.169.170.0/28.

Вариант 2. Два узла принадлежат одной подсети. Какое максимальное количество единиц может содержать маска подсети?

IP-адрес узла 1: 192.169.170.31.

IP-адрес узла 2: 192.169.170.21.

Выберите один верный вариант ответа:

А) 24;

Б) 25;

В) 26;

Г) 27.

Вариант 3. По заданным IPv4-адресам двух узлов определите наименьшее количество уникальных хостов, которые могут быть в адресном пространстве подсети и при этом оба узла принадлежали этой подсети.

IP-адрес узла 1: 192.169.170.31.

IP-адрес узла 2: 192.169.170.21.

Выберите один верный вариант ответа:

А) 30;

Б) 32;

В) 64;

Г) 62.

Решение.

IP-адрес состоит из четырёх частей (октетов), записанных в виде десятичных чисел с точками. Каждый октет может принимать в десятичном виде значения от 0 до 255 или в двоичном виде – от 0000 0000 до 1111 1111.

IP-адрес узла 1: 192.169.170.31 в двоичном виде будет выглядеть так:

11000000.10101001.10101010.00011111

IP-адрес узла 2: *192.169.170.21* в двоичном виде будет выглядеть так:

11000000.10101001.10101010.00010101

Количество двоичных цифр в IP-адресе, которые приходятся на номер сети, и количество цифр в адресе, приходящееся на идентификатор узла, могут быть различными в зависимости от маски сети.

Так как два узла принадлежат одной подсети, значит, они должны иметь одинаковые биты в своём адресе, начиная с самого левого, до тех бит, которые отвечают за адрес конкретного узла.

IP-адрес узла 1	11000000.10101001.10101010.00011111
IP-адрес узла 2	11000000.10101001.10101010.00010101
Одинаковые подряд идущие биты, начиная с левого	11000000.10101001.10101010.0001

Из теории выше мы помним, что в адресном пространстве два адреса заняты постоянно: адрес сети, на конце которого все нули, и широковещательный адрес, имеющий на конце все единицы в этой подсети. Если мы присмотримся к записи первого узла в двоичном виде, мы увидим 5 подряд идущих единиц справа. Чтобы данный адрес был именно адресом узла, необходимо, чтобы он отличался от широковещательного, то есть имел в своей записи хотя бы один ноль. Получается, что минимальное количество бит, которое должно быть отведено для записи IPv4-адреса узла, должно быть равно 6.

Это позволяет сделать следующие выводы.

1. Минимальное количество узлов в искомой подсети равно $2^6 - 2 = 64 - 2 = 62$. Это – ответ **Г** на вариант 3 задания №11.

2. Маска подсети будет состоять из $32 - 6 = 26$ единиц. То есть префикс маски будет **/26**. Это соответствует ответу **В** на вариант 2 задания №11.

3. Чтобы вычислить адрес сети, надо применить к адресу узла побитовую логическую операцию конъюнкции. Напомним, что конъюнкция

является аналогом умножения, в отличие от операции дизъюнкции (сложения).

IP-адрес узла 1	11000000.10101001.10101010.00011111
Маска	11111111.11111111.11111111.11000000
Адрес подсети	11000000.10101001.10101010.00000000

Получаем, что адрес подсети будет 192.169.170.0/26. Это – ответ **Б** на вариант 1 задания № 11.

В демоварианте разобран непростой случай, когда адрес узла имеет на конце подряд идущие единицы, которые будут соответствовать ширококвещательному каналу, если неверно определить адрес подсети и размер маски. Об этом стоит помнить.

Вычислим дополнительно адрес ширококвещательного канала, полученного для нашей подсети.

Адрес подсети	11000000.10101001.10101010.00000000
Адрес ширококвещательного канала	11000000.10101001.10101010.00111111

Получаем, адрес 192.169.170.63.

Можем сделать дополнительные выводы, например, что адрес первого узла подсети равен 192.169.170.1, адрес последнего узла подсети равен 192.169.170.62. Оба узла из вариантов задач подходят в этот диапазон. Значит, решение найдено верно.

Разберём дополнительно ещё один пример. Вычислим минимальное количество хостов, разрядность маски и адрес подсети, которой принадлежат два узла сети: 93.124.227.167 и 93.124.227.189.

IP-адрес узла 1	01011101.01111100.11100011.101 00111
IP-адрес узла 2	01011101.01111100.11100011.101 11101
Одинаковая часть	01011101.01111100.11100011.101

Из оставшихся частей IP-адресов видим, что ни один из них не состоит только из единиц, а, значит, можем принять за минимальное количество разрядов значение, равное 5. Отсюда:

1. Количество адресов в подсети равно $2^5 - 2 = 30$.
2. Маска подсети имеет $32 - 5 = 27$ единиц, то есть равна /27.
3. Адрес подсети: 01011101.01111100.11100011.10100000 или 93.124.227.160/27.
4. Широковещательный адрес: 93.124.227.191.
5. Адрес первого хоста: 93.124.227.161.
6. Адрес последнего хоста: 93.124.227.190.

Задание №11 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Верно выполненное решение оценивается в 5 баллов.

Рассмотрим возможные варианты задания №12.

Для решения задания №12 требуется знать основные понятия систем счисления («основание», «базис», «алфавит»), способы перевода чисел в разных системах счисления, особенности выполнения базовых арифметических операций в системах счисления с основанием, отличным от 10, а также уметь решать задачи на перевод значений из одной системы счисления в другую систему счисления, особенности выполнения базовых арифметических операций в системах счисления с основанием, отличным от 10.

Система счисления – это совокупность правил и приёмов записи чисел с помощью определённого набора символов, цифровых знаков.

Основание системы счисления – это количество знаков, используемых для записи числа в этой системе.

Классификация систем счисления:

- непозиционные;
- позиционные.

В *непозиционных* системах счисления величина, которую обозначает цифра, не зависит от положения в числе. Для записи любых чисел используется всего один символ: палочка, узелок, зарубка.

Примером непозиционной системы счисления служит унарная система счисления (например, счёт на палочках для детей). Римская система счисления тоже является непозиционной.

В основе римской системы счисления лежат знаки **I** (один палец) для числа 1, **V** (раскрытая ладонь) для числа 5, **X** (две сложенные ладони) для 10, а также специальные знаки для обозначения чисел 50, 100, 500 и 1000. Для обозначения чисел 100, 500 и 1000 стали применять первые буквы соответствующих латинских слов (**C**entum – сто, **D**emimille – половина тысячи, **M**ille – тысяча).

Пример числа в римской системе счисления: MDII, что в переводе в десятичную систему счисления будет равно 1502 ($M+D+I+I = 1000+500+1+1 = 1502_{10}$).

Позиционные системы счисления – это системы счисления, в которых количественный эквивалент каждой цифры (её вес) зависит от её положения (позиции) в записи числа.

Например, число 1502 состоит из 4 цифр. Очевидно, что сама по себе цифра 5 будет больше цифры 1. Но в составе числа 5 стоит на позиции сотен, в то время как 1 стоит на позиции тысяч, поэтому количественное представление 5 – пять сотен (пятьсот), а у 1 – одна тысяча.

В настоящее время в компьютерах, планшетах, телефонах широко распространенными позиционными системами счисления являются десятичная, двоичная, восьмеричная и шестнадцатеричная.

Общее свойство всех позиционных систем счисления: при каждом переходе влево (вправо) в записи числа на один разряд величина цифры увеличивается (уменьшается) во столько раз, чему равно основание системы счисления.

Алфавитом системы счисления называется совокупность различных цифр, используемых в позиционной системе счисления для записи чисел.

- Десятичная система счисления: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9\}$.
- Двоичная система счисления: $\{0, 1\}$.
- Восьмеричная система счисления: $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7\}$.
- Шестнадцатеричная система счисления:
 $\{0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, A, B, C, D, E, F\}$, где $A = 10$, $B = 11$, $C = 12$, $D = 13$,
 $E = 14$, $F = 15$.

Базисом позиционной системы счисления называется последовательность чисел, каждое из которых задаёт количественное значение или «вес» соответствующего разряда.

Примеры:

- 10-ая система счисления $\gg \{10^0, 10^1, 10^2, 10^3, 10^4, \dots, 10^k\}$;
- 2-ая система счисления $\gg \{2^0, 2^1, 2^2, 2^3, 2^4, \dots, 2^k\}$;
- 8-ая система счисления $\gg \{8^0, 8^1, 8^2, 8^3, 8^4, \dots, 8^k\}$;
- 16-ая система счисления $\gg \{16^0, 16^1, 16^2, 16^3, 16^4, \dots, 16^k\}$;
- 5-ая система счисления $\gg \{5^0, 5^1, 5^2, 5^3, 5^4, \dots, 5^k\}$.

Любое натуральное число N_q в *развёрнутой форме* может быть представлено в следующем виде:

$$N_q = \pm C_1 \cdot q^0 + C_2 \cdot q^1 + \dots + C_i \cdot q^{i-1} + \dots + C_n \cdot q^{n-1},$$

где $C_i \in \{0, 1, \dots, q - 1\}$, $i \in \{1, 2, \dots, n\}$, n – число целых разрядов.

Примеры:

$$1502_{10} = 2 \cdot 10^0 + 0 \cdot 10^1 + 5 \cdot 10^2 + 1 \cdot 10^3;$$

$$FA35_{16} = 5 \cdot 16^0 + 3 \cdot 16^1 + 10 \cdot 16^2 + 15 \cdot 16^3;$$

$$1457_8 = 7 \cdot 8^0 + 5 \cdot 8^1 + 4 \cdot 8^2 + 1 \cdot 8^3;$$

$$3412_5 = 2 \cdot 5^0 + 1 \cdot 5^1 + 4 \cdot 5^2 + 3 \cdot 5^3.$$

Обратите внимание, что нумерация разрядов начинается с крайнего правого разряда исходного числа и движется налево.

Для перевода числа из одной системы счисления в другую применяются следующие правила.

Целое число, представленное в исходной системе счисления, последовательно делится на новое основание до тех пор, пока частное не окажется меньше нового основания. В новой системе счисления число запишется в виде остатков от деления, начиная с последнего, и в качестве старшей цифры слева приписывается последнее частное.

Рассмотрим серию примеров.

Переведём число 132 из десятичной системы счисления в двоичную. Для этого 132 разделим на 2, получаем 66 и остаток 0, далее 66 делим на 2 и получаем частное 33 и остаток 0. На следующем шаге 33 делим на 2 и получаем 16 и остаток 1. И так далее последовательно делим на основание 2, до тех пор, пока на последнем шаге не получится частное, меньшее двух (рис. 26). В двоичной системе счисления число запишется в виде остатков от деления, начиная с последнего, а в качестве старшей цифры слева необходимо написать частное, то есть 1.

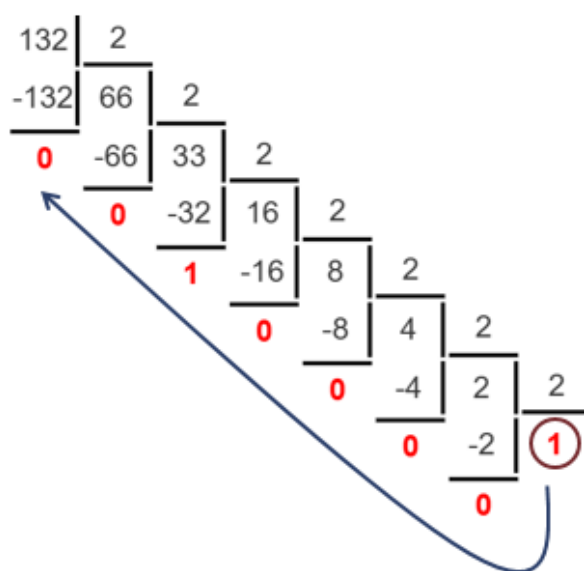


Рис. 26. Перевод числа из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления

$$132_{10} = 10000100_2$$

Ответ: 10000100_2 .

Рассмотрим другой пример. Возьмём десятичное число 165 и переведём его в шестнадцатеричную систему счисления. Для начала 165 делится на 16 (получается частное 10), остаток от деления равен 5.

Так как частное меньше 16, деление на этом прекращаем (рис. 27). В шестнадцатеричной системе счисления цифре 10 соответствует символ А. Записываем итоговый результат А5 в шестнадцатеричной системе счисления.

$$\begin{array}{r|l} 165 & 16 \\ -160 & 10 \\ \hline & 5 \end{array}$$

Рис. 27. Перевод числа из десятичной системы счисления в шестнадцатеричную систему счисления

$$165_{10} = A5_{16}$$

Ответ: $A5_{16}$.

При переводе числа из одной системы счисления в другую также можно пользоваться формулой развёрнутого представления числа. Так, например, десятичное число 165 не превышает 2^8 и может быть разложено на сумму произведений 1 на 2^7 , 1 на 2^5 , 1 на 2^2 и 1 на 2^0 . На остальных позициях разрядов записываются нули (Таблица 2).

Таблица 2. Поразрядное преобразование числа 165 из десятичной системы счисления в двоичную систему счисления

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
0	0	0	1	0	1	0	0	1	0	1

Таким образом, получили двоичное представление числа 165_{10} .

$$165_{10} = 10100101_2$$

Ответ: 10100101_2 .

Переведём число 101100_2 из двоичной системы счисления в десятичную. Для этого запишем цифры числа, начиная с правой, помноженные на основание в степени, начиная от нулевой (Таблица 3). Получим следующую развёрнутую форму числа:

$$101100_2 = 0 \cdot 2^0 + 0 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^4 + 1 \cdot 2^5.$$

Таблица 3. Поразрядное преобразование числа 101100 из двоичной системы счисления в десятичную систему счисления

2^{10}	2^9	2^8	2^7	2^6	2^5	2^4	2^3	2^2	2^1	2^0
1024	512	256	128	64	32	16	8	4	2	1
0	0	0	0	0	1	0	1	1	0	0

После приведения получим ответ: $101100_2 = 44_{10}$.

Ответ: 44_{10} .

Теперь рассмотрим условия и решения трёх задач под №12 демонстрационных вариантов.

Вариант 1.

Определите, чему равно значение X в уравнении, приведённом ниже. В ответ запишите только само число в указанной системе счисления без указания основания. Например, если $X = 12_{15}$, то в поле ответа необходимо записать 12.

$$X_8 + 20_4 \cdot 25_{16} = 2025_8$$

Решение.

Воспользуемся следующим алгоритмом.

1. Приведём множители выражения $20_4 \cdot 25_{16}$ к одному основанию и вычислим результат. Для простоты воспользуемся в качестве промежуточной системы счисления десятичной системой счисления.

2. Переведём полученный в п. 1 результат в восьмеричную систему счисления, так как основание неизвестного, как и значение справа, записаны именно в восьмеричной системе счисления.

3. Вычтем из правого числа значение, полученное в п. 2. Результат и будет искомым X .

Вычислим значения:

$$20_4 = 0 \cdot 4^0 + 2 \cdot 4^1 = 8_{10},$$

$$25_{16} = 5 \cdot 16^0 + 2 \cdot 16^1 = 37_{10},$$

$$20_4 \cdot 25_{16} = 8_{10} \cdot 37_{10} = 296_{10}.$$

Переведём 296_{10} в восьмеричную систему счисления. Количество разрядов можем оценить заранее: $8^2 < 296 < 8^3$,

$$296_{10} = 256 + 40 = 4 \cdot 8^2 + 5 \cdot 8^1 + 0 \cdot 8^0 = 450_8.$$

Найдём разность

$$2025_8 - 450_8 = ?_8.$$

При вычитании в системе счисления, отличной от десятичной, надо не забывать правильно переносить разряды (вычитание, как и сложение, делать по модулю основания системы счисления).

$$\begin{array}{r} \cdot \\ \\ - 2 0 2 5 \\ 4 5 0 \\ \hline \mathbf{1} \mathbf{3} \mathbf{5} \mathbf{5} \\ 5_8 - 0_8 = \mathbf{5}_8 \\ 2_8 - 5_8 = ?_8 \end{array}$$

Так как из меньшего не вычесть большее, занимаем у соседнего разряда единицу. Получим $12_8 - 5_8 = (8 + 2)_8 - 5_8 = 5_8$.

В третьем справа столбце мы занимали 1, значит, сейчас там стоит 7. Получаем $7_8 - 4_8 = 3_8$.

В самом старшем разряде остаётся 1_8 .

$$X_8 = 1355_8$$

В ответ следует записать только само число X без указания основания.

Ответ: 1355.

Вариант 2.

Вычислите приведённое ниже выражение. Определите, в скольких разрядах записи результата в 16-й системе счисления будут буквы латинского алфавита. В ответ запишите только количество подходящих разрядов.

$$1661_{16} + 16_8 \cdot 61_8 = ?_{16}$$

Решение.

Решение этого варианта задания будет аналогично предыдущему варианту: сначала найти произведение двух чисел, затем привести к одному основанию со вторым слагаемым, после – найти сумму. В ответ следует записать количество разрядов, в которых будет присутствовать буква латинского алфавита в записи числа с основанием 16.

Самым понятным вариантом для конкурсантов является приведение всех чисел к десятичной системе счисления. Но эти преобразования могут занять дополнительное время. Обладая навыками нахождения сумм, разностей, произведений и частных чисел в различных системах счисления, можно ускорить получение результата. Рассмотрим по порядку действия с числами.

1. Найдём произведение $16_8 \cdot 61_8 = (16_8 \cdot 1_8) + (16_8 \cdot 60_8)$.

Первое произведение даёт 16_8 , второе будем высчитывать по модулю 8.

$$6_8 \cdot 6_8 = (36 \bmod 8)_8 = ((32 + 4) \bmod 8)_8 = 4_8$$

Правую 4 записываем в соответствующий разряд, все остальные цифры идут в следующий слева разряд со знаком «+».

$1_8 \cdot 6_8 = 6_8$, но мы добавляем ещё 4_8 из предыдущего произведения, получаем 12_8 .

Вышло $(16_8 \cdot 60_8) = 1240_8$.

Отсюда, $16_8 \cdot 61_8 = 16_8 + 1240_8 = \mathbf{1256_8}$.

$$\begin{array}{r}
 16 \\
 \times 61 \\
 \hline
 + \quad 16 \\
 124 \\
 \hline
 1256
 \end{array}$$

2. Переведём полученное в предыдущем пункте число в шестнадцатеричную систему счисления. Воспользуемся для этого двоичным представлением числа. Вспомним, что в восьмеричной системе счисления каждая цифра соответствует 3 битам в двоичном представлении, а в шестнадцатеричной системе счисления каждая цифра соответствует 4 битам в двоичном представлении.

Число в 8-й системе счисления	1	2	5	6
Число в 2-й системе счисления	0 0 1	0 1 0	1 0 1	1 1 0
То же число в 2-й системе счисления, но разбивка по 4 бита	0 0 1 0	1 0 1 0	1 1 1 0	
Число в 16-й системе счисления	2	A	E	

$$1256_8 = 2AE_{16}$$

3. Вычислим сумму $1661_{16} + 2AE_{16} = ?$

$$\begin{array}{r}
 +I \\
 + 1661 \\
 2AE \\
 \hline
 190F
 \end{array}$$

Результат выражения равен $190F_{16}$. Буква в этом числе всего в одном разряде, следовательно, в ответ запишем цифру 1.

Ответ: 1.

Вариант 3.

Найдите разницу между максимальным и минимальным четырёхзначными (в десятичном представлении) целыми числами, записи которых в 5-й системе счисления будут палиндромами. В ответ запишите только целое число в десятичной системе счисления без указания основания.

Примечание. Числовой палиндром – это число, одинаково читающееся слева направо и справа налево.

Решение.

Максимальное четырёхзначное число в десятичной системе счисления – это 9999_{10} . В пятеричной системе счисления оно соответствует 304444_5 . Это – верхняя граница диапазона.

Минимальное четырёхзначное число в десятичной системе счисления – это 1000_{10} . В пятеричной системе счисления оно соответствует 13000_5 . Это – нижняя граница диапазона.

Максимальное число в пятеричной системе счисления, которое является палиндромом, должно быть меньше 304444_5 и зеркально относительно своей середины. Мы можем взять левую половину числа и отзеркалить её, при этом убедившись, что полученное число будет меньше верхней границы диапазона. Получаем $304403_5 = 9978_{10}$.

Аналогично поступаем с минимальным палиндромом, который будет больше 13000_5 , и равен $13031_5 = 1016_{10}$.

$$9978_{10} - 1016_{10} = 8962_{10}$$

Ответ: 8962.

Задание №12 считается выполненным, если ответ учащегося совпал с эталоном. Верно выполненное решение оценивается в 8 баллов.